VAASAN YLIOPISTO
Talousmatematiikka
Prof. Ilkka Virtanen

OPERAATIOANALYYSI ORMS.1020

Tentti 19.12.2007

1. Kultaseppä on hankkinut edullisesti erän jalokiviä: 100 rubiinia ja 120 safiiria. Näistä hän valmistaa timanttisormuksia käyttäen hyväksi valmiita kultasormusrunkoja. Kultaseppä valmistaa kahta eri mallia sormusta, tyyppiin 1 tulee 2 rubiinia ja 3 safiiria. Jalokivien kiinnittäminen ja sormuksen viimeistely vaatii 5 tuntia työtä. Sormustyyppiin 2 tulee 3 rubiinia ja 2 safiiria, vaativamman istutuksen johdosta työaikaa tarvitaan 10 tuntia sormusta kohti. Tyyppiä 1 olevia sormuksia on valmistettava vähintään 20 kpl ja tyypin 2 sormuksia vähintään 25 kpl. Työaikaa kultaseppä voi käyttää sormusten valmistamiseen yhteensä enintään 350 tuntia. Sormusten myyntihinnat ovat 800 € (tyyppi 1) ja 1000 € (tyyppi 2). Rubiineja on mahdollisuus hankkia lisää 100 € kappalehintaan.

   Muotoile kultasepän suunnitteluongelma (eri sormustyyppien valmistusmäärät, lisärubiinien osto) LP-malliksi, kun tavoitteena on sormuksista saatavien nettomyyntitulojen (sormusten myynti – lisärubiinien osto) maksimointi. Kiinnitä huomiota mallin eri osien selkeään esittämiseen. Mallia ei tarvitse ratkaista.

2. Tarkastellaan epäyhtälömuodossa annettua lineaarisen optimoinnin tehtävää (LP-mallin ns. kanoninen muoto):

$$
\begin{aligned}
\text{Max } z = \; & 5x_1 + 2x_2 \\
\text{Ehdoin } \; & 2x_1 + x_2 \leq 100 \\
& x_1 + x_2 \leq 80 \\
& x_1 \leq 40 \\
& x_1, \; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

   a) Ratkaise malli esimerkiksi graafisesti. Ota käyttöön sopivat täytemuuttujat ja esitä näitä käyttäen alkuperäistä tehtävää vastaava yhtälömuotoinen malli. Kirjoita yhtälömuodon muuttujia käyttäen näkyviin optimiratkaisun muodostava kantaratkaisu (siis sekä varsinaisten toimintamuuttujien että täytemuuttujien arvot).
   b) Kirjoita näkyviin edellä esitettyä (primali)tehtävää vastaava duaalinen tehtävä. Esitä duaalimalli sekä epäyhtälömuodossa että yhtälömuodossa. Kiinnitä huomiota muuttujien tarkoituksenmukaiseen valintaan.
   c) Kirjoita näkyviin yhtälömuotoisen duaalisen tehtävän optimiratkaisu.

3. Dakota Furniture valmistaa työpöytiä, pöytiä ja tuoleja. Rajallisia resursseja valmistuksessa edustavat puuraaka-aine, puusepäntyö ja viimeistely. Alla olevassa taulukossa on esitetty kunkin aktiviteetin vaatimat resurssit, kysyntärajoitteet sekä syntyvä katetuotto (kaikki per valmistettu tuoteyksikkö).

Resurssi	Työpöytä	Pöytä	Tuoli	Käytettävissä
Puuraaka-aine	8	6	1	48
Puusepäntyö	4	2	1.5	20
Viimeistely	2	1.5	0.5	8
Kysyntä	Ei rajoituksia	Enintään 5	Ei rajoituksia	
Katetuotto	60	30	20	

Liitteessä on esitetty mallin formulointi, ratkaisu (ml. viimeinen Simplex -taulu) sekä herkkyysanalyysi Lindo -ohjelmaa käyttäen. Työpöytien valmistusmäärää on merkitty muuttujalla x_1, pöytien muuttujalla x_2 ja tuolien x_3.

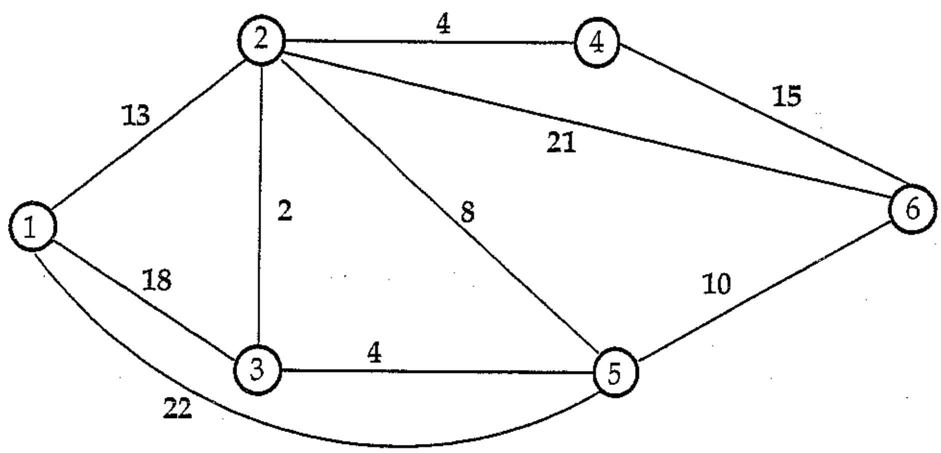
a) Kirjoita näkyviin katetuoton maksimoiva valmistusohjelma, sen mukainen kokonaiskatetuotto sekä kriittiset, ts. toimintaa aidosti rajoittavat resurssit.
b) Pöytien valmistus ei sisälly optimaaliseen valmistusohjelmaan. Kuinka suuri tulisi pöydän (yksikkö)katetuoton vähintään olla, jotta pöydät kuuluisivat optimiohjelmaan? Suuriko kokonaiskatetuotto syntyisi tämän rajaluvun mukaisella pöydän katetuotolla?
c) Oletetaan, että on valmistettava vastoin optimaalista ohjelmaa 1 kpl pöytiä (mallin parametrit yllä olevan taulukon mukaiset). Paljonko kokonaiskatetuotto tämän seurauksena laskee?
d) Työpöydät ovat joutuneet kovan hintakilpailun kohteeksi. Kuinka paljon työpöydän hintaa voidaan enintään alentaa (oletetaan, että pöydän katetuotto laskee hinnan alennusta vastaavan määrän), jotta ratkaisuna saatu valmistusohjelma säilyy optimaalisena? Suuriko on tätä hinnanalennusta vastaava kokonaiskatetuoton lasku?
e) Puuraaka-aineen toimittaja on valmis nostamaan nykyistä toimituserää (= 48) 25 %:lla edellyttäen, että hän saa lisätoimituksesta 2 rahayksikköä korkeamman yksikköhinnan. Kannattaako toimittajan tarjous hyväksyä?
f) Viimeistelyosaston kapasiteettia on mahdollisuus kasvattaa alihankinnalla 7 rahayksikön yksikköhintaan. Paljonko kapasiteettia voidaan korkeintaan lisätä (onko lisääminen yleensä kannattavaa?) niin, että alkuperäisen valmistusohjelman tuotevalikoima ja resurssien kriittisyys säilyvät ennallaan?

4. Öljy-yhtiön kolmen öljykentän A, B ja C tuotantokapasiteetit ovat 6, 5 ja 8 miljoonaa gallonaa raakaöljyä päivässä. Raakaöljy johdetaan putkistoja pitkin yhtiön kolmelle jalostamolle I, II ja III. Jalostamojen kapasiteetit ovat 4, 8 ja 7 miljoonaa gallonaa raakaöljyä päivässä. Kustannukset öljyn kuljetuksesta putkistoa pitkin ovat 50 senttiä 1000 gallonaa ja mailia kohti. Seuraavassa taulukossa on annettu öljykenttien ja jalostamoiden väliset etäisyydet maileina. On huomattava, että öljykentältä A ei ole öljyputkiyhteyttä jalostamoon III. Jalostamo pyrkii suoriutumaan öljyn kuljetuksestaan mahdollisimman pienin kustannuksin.

Etäisyys öljykentän ja jalostamon välillä (mailia)		Jalostamo I	Jalostamo II	Jalostamo III
Öljykenttä	A	120	180	-
	B	300	100	80
	C	200	250	120

a) Formuloi tehtävä klassisen kuljetusprobleeman muotoon ja esitä se myös verkkomuodossa graafisesti
b) Ratkaise tehtävä kuljetusalgoritmin avulla
c) Miten öljynkuljetustehtävä hoidetaan optimitavalla toimittaessa ja mitkä ovat syntyvät kokonaiskustannukset tällöin. Havainnollista tulos verkkograafina.

5. Kuljetusreitti logistisen verkon lähtösolmun 1 ja päätesolmun 6 välillä on mahdollista johtaa useita eri teitä välillä olevia solmuja 2 – 5 käyttäen. Liikenne solmujen välillä voi tapahtua kumpaan suuntaan hyvänsä.. Verkon rakenne on alla olevan kuvion mukainen. Solmujen välisiin kaariin liittyvät luvut ilmaisevat välimatkoja solmujen välillä.



Etsi Dijkstran algoritmia, joko graafista (käsin ratkaistaessa yksinkertaisempi) tai taulukkomuotoista, hyväksi käyttäen lyhin reitti solmusta 1 solmuun 6. (Verkon yksinkertaisuudesta johtuen ratkaisu on pääteltävissä verraten suoraviivaisesti ilman algoritmiakin, mutta tehtävän tarkoituksena on nimenomaan testata algoritmin tuntemusta).

Tentissä saa olla mukana tavanomaiset matemaattisten aineiden tentin apuvälineet: taulukkokirja (MAOL tai vastaava) ja laskin.

Liite tehtävään 3.

PROBLEM FORMULATION

```
MAX          60 X1 +  30 X2 +  20 X3
SUBJECT TO
PUUAINE 2)    8 X1 +   6  X2 +      X3 <=   48
PUUTYO  3)    4 X1 +   2  X2 + 1.5 X3 <=   20
VIIME   4)    2 X1 + 1.5 X2 + 0.5 X3 <=    8
KYSYNTA 5)               X2            <=    5
END
```

THE STARTING TABLEAU

ROW	(BASIS)	X1	X2	X3	SLK 2	SLK 3	SLK 4	SLK 5	
1	ART	-60.000	-30.000	-20.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	SLK 2	8.000	6.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	48.000
3	SLK 3	4.000	2.000	1.500	0.000	1.000	0.000	0.000	20.000
4	SLK 4	2.000	1.500	0.500	0.000	0.000	1.000	0.000	8.000
5	SLK 5	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	5.000

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 280.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	2.000000	0.000000
X2	0.000000	5.000000
X3	8.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	24.000000	0.000000
3)	0.000000	10.000000
4)	0.000000	10.000000
5)	5.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	60.000000	20.000000	4.000000
X2	30.000000	5.000000	INFINITY
X3	20.000000	2.500000	5.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	48.000000	INFINITY	24.000000
3	20.000000	4.000000	4.000000
4	8.000000	2.000000	1.333333
5	5.000000	INFINITY	5.000000

THE OPTIMAL TABLEAU

ROW	(BASIS)	X1	X2	X3	SLK 2	SLK 3	SLK 4	SLK 5	
1	ART	0.000	5.000	0.000	0.000	10.000	10.000	0.000	280.000
2	SLK 2	0.000	-2.000	0.000	1.000	2.000	-8.000	0.000	24.000
3	X3	0.000	-2.000	1.000	0.000	2.000	-4.000	0.000	8.000
4	X1	1.000	1.250	0.000	0.000	-0.500	1.500	0.000	2.000
5	SLK 5	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	5.000

VAASAN YLIOPISTO
Talousmatematiikka
Prof. Ilkka Virtanen

OPERATIONS RESEARCH, ORMS.1020

Exam 19.12.2007

1. A goldsmith has purchased a large number of jewels: 100 rubies and 120 sapphires. He constructs diamond rings using these jewels and golden ring frames. He makes two different types of rings. A ring of type 1 contains 2 rubies and 3 sapphires. It takes 5 hours to fasten the jewels to the ring of type 1. A ring of type 2 contains 3 rubies and 2 sapphires. Because of the elaborate design of this ring it takes 10 hours to fasten the jewels to the golden ring frame in this case. The goldsmith must produce at least 20 rings of type 1 and at leas 25 rings of type 2. The number of working hours available to fasten the jewels to the ring frames is limited to (less or equal to) 350 hours. Prices of the rings are 800 € (type 1) and 1000 € (type 2). It is possible to purchase additional rubies with a unit price of 100 €.

   Formulate an LP model which can be solved to find the maximum net cash flow (total revenue of the sales minus costs of the extra material) of the goldsmith. Pay attention to the notation and clarity of your formulation. You need not solve the model.

2. Consider the following Linear Programming model:

$$\begin{aligned} \text{Max } z = \; & 5x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1 + x_2 \leq 80 \\ & x_1 \leq 40 \\ & x_1, \; x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   a) Solve the problem graphically. Using appropriate slack variables rewrite the model as a set of equalities. Give the values of all variables (meaning the decision variables and the slack variables) in the optimal basic feasible solution.
   b) Determine the Dual of the above Primal LP model. Write down two versions of the Dual LP model, one using inequalities and the other using equalities in the constraints. (Pay attention to the appropriate notation.)
   c) Find the optimal solution of the Dual, using the Dual LP model determined in b) which contained equalities in the constraints.

3. Dakota Furniture manufactures benches, tables and chairs. The resources used are the raw-material wood and two kinds of labor; carpentry and finishing. The following table contains the resources needed to produce each product, the limits on supply of the resources, the limits on demand for the manufactured product and the profit per one unit for each type of product.

	Bench	Table	Chair	Available supp-ly
Wood	8	6	1	48
Carpentry	4	2	1.5	20
Finishing	2	1.5	0.5	8
Demand limit	no limit	≤ 5	no limit	
Net profit	60	30	20	

In the Appendix you will find the LP model associated with maximizing Dakota Furniture's profit, together with its solution (including the optimal simplex tableau) and the sensitivity report of Lindo. In the Appendix the variable x_1 correspond to the number of benches produced, x_2 to the number of tables produced, and x_3 to the number of chairs produced.

a) Describe the production which maximizes the net profit. What is the maximal value of the net profit and what is (are) the critical resource(s)?
b) In the maximal profit situation the number of tables produced is zero. How big should the net profit of one table be in order to cause change in the optimal production schedule. How big will the total net profit be, when the net profit per table has this threshold value?
c) Let us assume that we decide to produce one table, even though this means that the profit is not maximal. How much will the total net profit decrease because of this decision? (The parameters of the model are still as in the above table.)
d) The markets of working tables are facing tough price competition. How much can we decrease the unit price of the benches without changing in the optimal feasible basic solution? (We assume that the change in the unite price causes an equal change in the net profit per one table.) How much will the total net profit decrease if we make this price change?
e) The sawmill delivering the wood is willing to increase the present supply (= 48) by 25%, if it can raise the unit price by 2 currency units for the additional delivery. Should we accept this offer?
f) The number of the finishing units can be increased by subcontracting. The subcontracted finishing units have a price of 7 currency units per hour. How much can we increase the finishing resource without changing the optimal product mix and the structure of critical resources? (Is the extra resource generally a good idea?)

4. Refineries A, B and C with daily capacities of 6, 5, and 8 million gallons, respectively, supply distribution areas I, II and III with daily demands of 4, 8, and 7 million gallons, respectively. Gasoline is transported to the distribution areas through a network of pipelines. The transportation cost is 50 cents per 1000 gallons per mile of pipeline. The following table gives the mileage between the refineries and the distribution areas. Refinery 1 is not connected to distribution area 3.

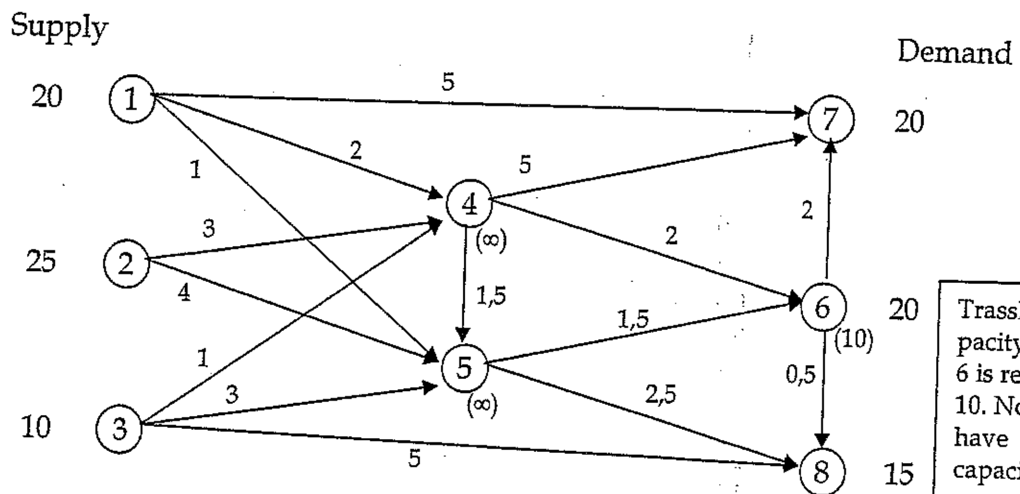
Distance to area from refinery (miles)		Area I	II	III
Refinery	A	120	180	-
	B	300	100	80
	C	200	250	120

a) Determine the transportation model representation of the above problem (It is assumed that we want to minimize the transportation costs). Draw also the network representation of the above problem.

b) Find the optimum transportation schedule using the transportation algorithm.

c) Describe the optimal transportation schedule. Determine the total cost of the optimal solution. Illustrate the solution by a graph.

5. The following network shows the manner in which cars can be shipped from the three plants (nodes 1,2 and 3) by way of three distribution centers (nodes 4,5 and 6) to three car dealers (nodes 6,7 and 8). The shipping costs per car (in $1000) are shown on the arcs. Note that node 6 combined a distribution center and a car dealership.



Trasshipment capacity of the node 6 is restricted to 10. Nodes 4 and 5 have unbounded capacity.

Determine the minimum shipping costs using the transshipment algorithm.

PROBLEM FORMULATION Appendix (Liite tehtävään 3.)

```
MAX          60 X1 +  30 X2 +  20 X3
SUBJECT TO
PUUAINE 2)    8 X1 +  6  X2 +      X3 <=   48
PUUTYO  3)    4 X1 +  2  X2 + 1.5 X3 <=   20
VIIME   4)    2 X1 + 1.5 X2 + 0.5 X3 <=    8
KYSYNTA 5)               X2           <=    5
END
```

THE STARTING TABLEAU

ROW	(BASIS)		X1	X2	X3	SLK 2	SLK 3	SLK 4	SLK 5	
1	ART		-60.000	-30.000	-20.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	SLK	2	8.000	6.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	48.000
3	SLK	3	4.000	2.000	1.500	0.000	1.000	0.000	0.000	20.000
4	SLK	4	2.000	1.500	0.500	0.000	0.000	1.000	0.000	8.000
5	SLK	5	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	5.000

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 280.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	2.000000	0.000000
X2	0.000000	5.000000
X3	8.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	24.000000	0.000000
3)	0.000000	10.000000
4)	0.000000	10.000000
5)	5.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	60.000000	20.000000	4.000000
X2	30.000000	5.000000	INFINITY
X3	20.000000	2.500000	5.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	48.000000	INFINITY	24.000000
3	20.000000	4.000000	4.000000
4	8.000000	2.000000	1.333333
5	5.000000	INFINITY	5.000000

THE OPTIMAL TABLEAU

ROW	(BASIS)		X1	X2	X3	SLK 2	SLK 3	SLK 4	SLK 5	
1	ART		0.000	5.000	0.000	0.000	10.000	10.000	0.000	280.000
2	SLK	2	0.000	-2.000	0.000	1.000	2.000	-8.000	0.000	24.000
3		X3	0.000	-2.000	1.000	0.000	2.000	-4.000	0.000	8.000
4		X1	1.000	1.250	0.000	0.000	-0.500	1.500	0.000	2.000
5	SLK	5	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	5.000

1. Kultaseppä on hankkinut edullisesti erän jalokiviä: 100 rubiinia ja 120 safiiria. Näistä hän valmistaa timanttisormuksia käyttäen hyväksi valmiita kultasormusrunkoja. Kultaseppä valmistaa kahta eri mallia sormusta, tyyppiin 1 tulee 2 rubiinia ja 3 safiiria. Jalokivien kiinnittäminen ja sormuksen viimeistely vaatii 5 tuntia työtä. Sormustyyppiin 2 tulee 3 rubiinia ja 2 safiiria, vaativamman istutuksen johdosta työaikaa tarvitaan 10 tuntia sormusta kohti. Tyyppiä 1 olevia sormuksia on valmistettava vähintään 20 kpl ja tyypin 2 sormuksia vähintään 25 kpl. Työaikaa kultaseppä voi käyttää sormusten valmistamiseen yhteensä enintään 350 tuntia. Sormusten myyntihinnat ovat 800 € (tyyppi 1) ja 1000 € (tyyppi 2). Rubiineja on mahdollisuus hankkia lisää 100 € kappalehintaan.

Muotoile kultasepän suunnitteluongelma (eri sormustyyppien valmistusmäärät, lisärubiinien osto) LP-malliksi, kun tavoitteena on sormuksista saatavien nettomyyntitulojen (sormusten myynti – lisärubiinien osto) maksimointi. Kiinnitä huomiota mallin eri osien selkeään esittämiseen. Mallia ei tarvitse ratkaista.

Päätösmuuttujat

x_1 = tyypin 1 sormusten valmistus

x_2 = — " — 2 — " — — " —

x_3 = ostettujen rubiinien lukumäärä

tavoitefunktio $z = 800x_1 + 1000x_2 - 100x_3$

rajoitteet

rubiinit: $2x_1 + 3x_2 \le 100 + x_3$

safiirit: $3x_1 + 2x_2 \le 120$

työ: $5x_1 + 10x_2 \le 350$

kysyntä 1 $x_1 \ge 20$

kysyntä 2 $x_2 \ge 25$

LP-Malli

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 800x_1 + 1000x_2 - 100x_3 \\ \text{s.t. } & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 100 \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 120 \\ & 5x_1 + 10x_2 \le 350 \\ & x_1 \ge 20 \\ & x_2 \ge 25 \end{aligned}$$

2. Tarkastellaan epäyhtälömuodossa annettua lineaarisen optimoinnin tehtävää (LP-mallin ns. kanoninen muoto):

$$\text{Max } z = 5x_1 + 2x_2$$

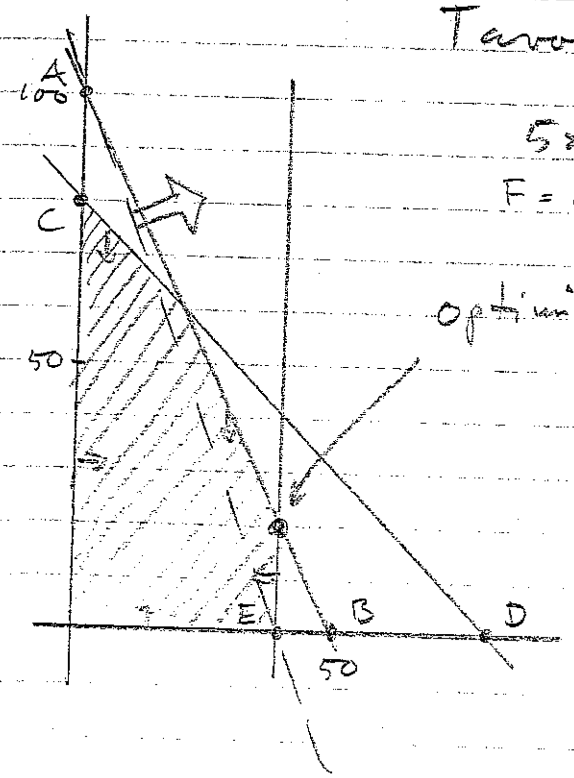
$$\text{Ehdoin} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 100 \\ x_1 + x_2 &\le 80 \\ x_1 &\le 40 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

a) Ratkaise malli esimerkiksi graafisesti. Ota käyttöön sopivat täytemuuttujat ja esitä näitä käyttäen alkuperäistä tehtävää vastaava yhtälömuotoinen malli. Kirjoita yhtälömuodon muuttujia käyttäen näkyviin optimiratkaisun muodostava kantaratkaisu (siis sekä varsinaisten toimintamuuttujien että täytemuuttujien arvot).
b) Kirjoita näkyviin edellä esitettyä (primaali)tehtävää vastaava duaalinen tehtävä. Esitä duaalimalli sekä epäyhtälömuodossa että yhtälömuodossa. Kiinnitä huomiota muuttujien tarkoituksenmukaiseen valintaan.
c) Kirjoita näkyviin yhtälömuotoisen duaalisen tehtävän optimiratkaisu.

a) 1. rajoite $2x_1 + x_2 \le 100$ ↓ alapuoli käypä
$A = (0, 100)$, $B = (50, 0)$

2. rajoite $x_1 + x_2 \le 80$ ↓ alap. käypä
$C = (0, 80)$, $D = (80, 0)$

3. rajoite $x_1 \le 40$ ← vasen puoli käypä
$E = (40, 0)$



Tavoitefunktio

$5x_1 + 2x_2 = 200$
$F = (0, 100) = A$, $G = (40, 0) = E$

optimi $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 100 \\ x_1 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 40 \\ x_2 = 20 \end{cases}$

$z = 240$

yhtälömuotoinen malli

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 5x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } \quad & 2x_1 + x_2 + s_1 = 100 \\ & x_1 + x_2 + s_2 = 80 \\ & x_1 + s_3 = 40 \end{aligned}$$

Optimaalinen kantaratkaisu

Kanta | Kantaan kuulumattomat

$$\begin{cases} x_1 = 40 \\ x_2 = 20 \\ s_2 = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_3 = 0 \end{cases}$$

$z = 240$

b) PRIMAALI

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 5x_1 + 2x_2 \quad (\text{"}\le\text{"}) \\ \text{s.t. } \quad & 2x_1 + x_2 + s_1 = 100 \\ & x_1 + x_2 + s_2 = 80 \\ & x_1 + s_3 = 40 \end{aligned}$$

Duaali

$$\begin{aligned} \text{Min } w &= 100y_1 + 80y_2 + 40y_3 \\ \text{s.t. } \quad & 2y_1 + y_2 + y_3 \ge 5 \\ & y_1 + y_2 \ge 2 \\ & y_1 \ge 0 \\ & y_2 \ge 0 \\ & y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min } w &= 100y_1 + 80y_2 + 40y_3 \\ \text{s.t. } \quad & 2y_1 + y_2 + y_3 - e_1 = 5 \\ & y_1 + y_2 - e_2 = 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

c) Primaali → Duaali

$s_2 > 0 \rightarrow y_2 = 0$

$s_1 = 0 \rightarrow y_1 \geq 0$

$s_3 = 0 \rightarrow y_3 \geq 0$

$\} \; e_1 = e_2 = 0$

$\uparrow$

$x_1 > 0, x_2 > 0$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_3 = 5 \\ y_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_3 = 1 \end{cases}$$

Duaalin optimiratkaisu

Kanta: $\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_3 = 1 \end{cases}$ Kantaan kuulumattomat: $\begin{cases} y_2 = 0 \\ e_1 = 0 \\ e_2 = 0 \end{cases}$

$w = 100 \cdot 2 + 80 \cdot 0 + 40 \cdot 1 = 240$

3. Dakota Furniture valmistaa työpöytiä, pöytiä ja tuoleja. Rajallisia resursseja valmistuksessa edustavat puuraaka-aine, puusepäntyö ja viimeistely. Alla olevassa taulukossa on esitetty kunkin aktiviteetin vaatimat resurssit, kysyntärajoitteet sekä syntyvä katetuotto (kaikki per valmistettu tuoteyksikkö).

Resurssi	Työpöytä	Pöytä	Tuoli	Käytettävissä
Puuraaka-aine	8	6	1	48
Puusepäntyö	4	2	1.5	20
Viimeistely	2	1.5	0.5	8
Kysyntä	Ei rajoituksia	Enintään 5	Ei rajoituksia	
Katetuotto	60	30	20	

Liitteessä on esitetty mallin formulointi, ratkaisu (ml. viimeinen Simplex -taulu) sekä herkkyysanalyysi Lindo -ohjelmaa käyttäen. Työpöytien valmistusmäärää on merkitty muuttujalla x_1, pöytien muuttujalla x_2 ja tuolien x_3.

a) Kirjoita näkyviin katetuoton maksimoiva valmistusohjelma, sen mukainen kokonaiskatetuotto sekä kriittiset, ts. toimintaa aidosti rajoittavat resurssit.

tuote	valmistus
Työpöytä	2
Pöytä	0
Tuoli	8

kriittiset resurssit:
Puutyö
Viimeistelytyö

Katetuotto 280

b) Pöytien valmistus ei sisälly optimaaliseen valmistusohjelmaan. Kuinka suuri tulisi pöydän (yksikkö)katetuoton vähintään olla, jotta pöydät kuuluisivat optimiohjelmaan? Suuriko kokonaiskatetuotto syntyisi tämän rajaluvun mukaisella pöydän katetuotolla?

30 + 5 = 35
katetuotto silloin 280
(Rajalla uusi optimi antaa saman katetuoton, kuin vanha optimi)

c) Oletetaan, että on valmistettava vastoin optimaalista ohjelmaa 1 kpl pöytiä (mallin parametrit yllä olevan taulukon mukaiset). Paljonko kokonaiskatetuotto tämän seurauksena laskee?

Redusoidun kustannuksen verran, eli katetuoton lasku = 5

d) Työpöydät ovat joutuneet kovan hintakilpailun kohteeksi. Kuinka paljon työpöydän hintaa voidaan enintään alentaa (oletetaan, että pöydän katetuotto laskee hinnan alennusta vastaavan määrän), jotta ratkaisuna saatu valmistusohjelma säilyy optimaalisena? Suuriko on tätä hinnanalennusta vastaava kokonaiskatetuoton lasku?

Suurin sallittu hinnan alennus on 4
Katetuotto laskee (kun alennus = 4) 2 × 4 = 8

e) Puuraaka-aineen toimittaja on valmis nostamaan nykyistä toimituserää (= 48) 25 %:lla edellyttäen, että hän saa lisätoimituksesta 2 rahayksikköä korkeamman yksikköhinnan. Kannattaako toimittajan tarjous hyväksyä?

(Lisäerä on 0,25 · 48 = 12
Kanta säilyy optimaalisena (*)
Hyöty = 12 · (varjohinta − lisäkustannus)
= 12 · (0 − 2)
= −24)

Koska osa puuraaka-ainetta jää käyttämättä ei kannata hankkia lisäpuuta! → EI

f) Viimeistelyosaston kapasiteettia on mahdollisuus kasvattaa alihankinnalla 7 rahayksikön yksikköhintaan. Paljonko kapasiteettia voidaan korkeintaan lisätä (onko lisääminen yleensä kannattavaa?) niin, että alkuperäisen valmistusohjelman tuotevalikoima ja resurssien kriittisyys säilyvät ennallaan?

Maksimi-lisäys 2 (ilman, että kanta vaihtuu)
varjohinta = 10 > 7 → kannattaa lisätä

Liite tehtävään 3.

PROBLEM FORMULATION

```
MAX          60 X1 +  30 X2 +  20 X3
SUBJECT TO
PUUAINE 2)    8 X1 +  6  X2 +      X3  <=   48
PUUTYO  3)    4 X1 +  2  X2 + 1.5 X3  <=   20
VIIME   4)    2 X1 + 1.5 X2 + 0.5 X3  <=    8
KYSYNTA 5)               X2           <=    5
END
```

THE STARTING TABLEAU

ROW	(BASIS)		X1	X2	X3	SLK 2	SLK 3	SLK 4	SLK 5	
1	ART		-60.000	-30.000	-20.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	SLK	2	8.000	6.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	48.000
3	SLK	3	4.000	2.000	1.500	0.000	1.000	0.000	0.000	20.000
4	SLK	4	2.000	1.500	0.500	0.000	0.000	1.000	0.000	8.000
5	SLK	5	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	5.000

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) $\boxed{280.0000}$ a)

VARIABLE	VALUE		REDUCED COST	
X1	2.000000	a)	0.000000	
X2	0.000000		$\boxed{5.000000}$	c)
X3	8.000000		0.000000	

ROW	SLACK OR SURPLUS		DUAL PRICES	
2)	24.000000		0.000000	e)
3)	0.000000		10.000000	
4)	0.000000	a)	$\boxed{10.000000}$	f)
5)	5.000000		0.000000	

NO. ITERATIONS= 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE		ALLOWABLE DECREASE	
X1	60.000000	20.000000		$\boxed{4.000000}$	d)
X2	30.000000	$\boxed{5.000000}$	b)	INFINITY	
X3	20.000000	2.500000		5.000000	

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE		ALLOWABLE DECREASE
2	48.000000	INFINITY		24.000000
3	20.000000	4.000000		4.000000
4	8.000000	$\boxed{2.000000}$	f)	1.333333
5	5.000000	INFINITY		5.000000

THE OPTIMAL TABLEAU

ROW	(BASIS)		X1	X2	X3	SLK 2	SLK 3	SLK 4	SLK 5	
1	ART		0.000	5.000	0.000	0.000	10.000	10.000	0.000	280.000
2	SLK	2	0.000	-2.000	0.000	1.000	2.000	-8.000	0.000	24.000
3		X3	0.000	-2.000	1.000	0.000	2.000	-4.000	0.000	8.000
4		X1	1.000	1.250	0.000	0.000	-0.500	1.500	0.000	2.000
5	SLK	5	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	5.000

4. Öljy-yhtiön kolmen öljykentän A, B ja C tuotantokapasiteetit ovat 6, 5 ja 8 miljoonaa gallonaa raakaöljyä päivässä. Raakaöljy johdetaan putkistoja pitkin yhtiön kolmelle jalostamolle I, II ja III. Jalostamojen kapasiteetit ovat 4, 8 ja 7 miljoonaa gallonaa raakaöljyä päivässä. Kustannukset öljyn kuljetuksesta putkistoa pitkin ovat 50 senttiä 1000 gallonaa ja mailia kohti. Seuraavassa taulukossa on annettu öljykenttien ja jalostamoiden väliset etäisyydet maileina. On huomattava, että öljykentältä A ei ole öljyputkiyhteyttä jalostamoon III. Jalostamo pyrkii suoriutumaan öljyn kuljetuksestaan mahdollisimman pienin kustannuksin.

Etäisyys öljykentän ja jalostamon välillä (mailia)		Jalostamo I	Jalostamo II	Jalostamo III
Öljykenttä	A	120	180	-
	B	300	100	80
	C	200	250	120

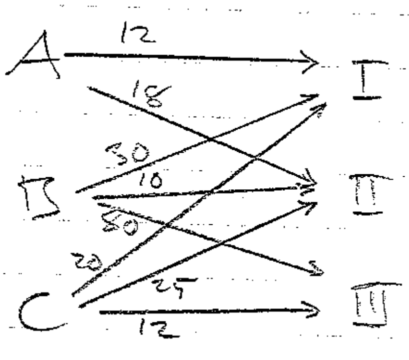
a) Formuloi tehtävä klassisen kuljetusprobleeman muotoon ja esitä se myös verkkomuodossa graafisesti
b) Ratkaise tehtävä kuljetusalgoritmin avulla
c) Miten öljynkuljetustehtävä hoidetaan optimitavalla toimittaessa ja mitkä ovat syntyvät kokonaiskustannukset tällöin. Havainnollista tulos verkkograafina.

a) x_{ij} = kentältä i jalostamolle j toimitettu raakaöljy (miljoonaa gallonaa/päivä)

$$Z = \$500\,(120x_{11} + 180x_{12} + 300x_{21} + 100x_{22} + 80x_{23} + 200x_{31} + 250x_{32} + 120x_{33})\,/\,\text{päivä}$$

$$= (12x_{11} + 18x_{12} + \dots + 12x_{33}) \cdot \frac{\$5000}{\text{päivä}}$$

	I	II	III	
A	12	18	M (X)	6
B	30	10	8	5
C	20	25	12	8
	4	8	7	



b)

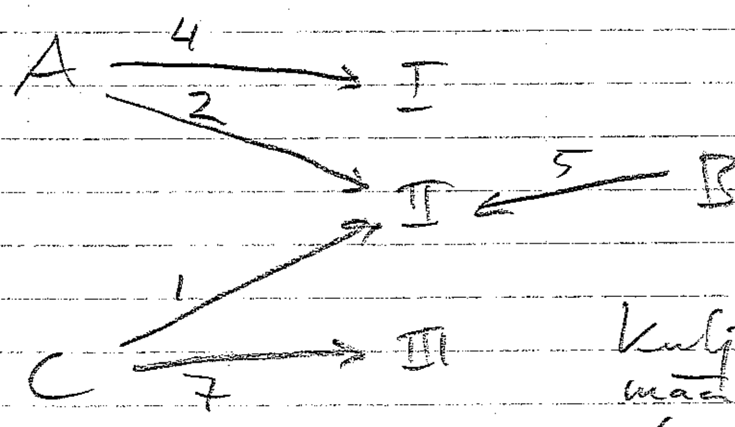
	$v_1 = 12$	$v_2 = 18$	$v_3 = 5$	
$u_1 = 0$	12; 4	18; 2	M; X; 5−M	6
$u_2 = -8$	30; −26	10; 5	8; −11	5
$u_3 = 7$	20; −1	25; 1	12; 7	8
	4	8	7	

c) optimi

Optimissa

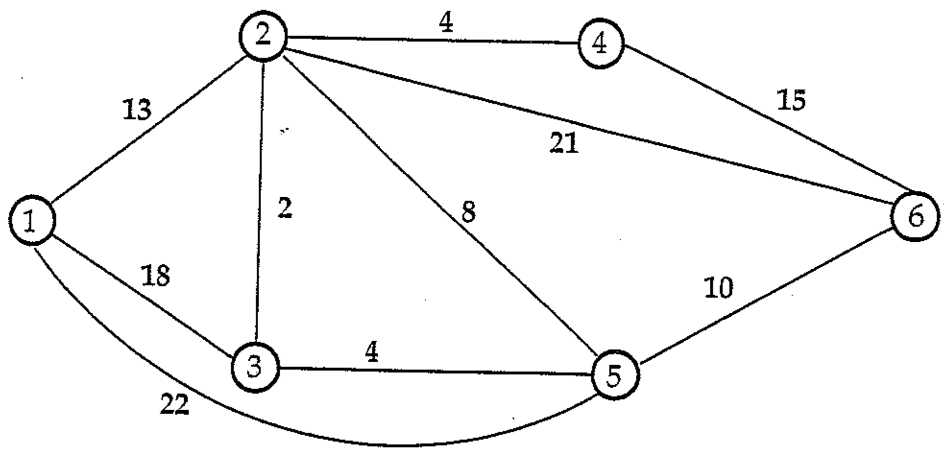
$$\begin{cases} x_{11} = 4 \\ x_{12} = 2 \\ x_{22} = 5 \\ x_{32} = 1 \\ x_{33} = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{21} = 0 \\ x_{23} = 0 \\ x_{31} = 0 \end{cases}$$

$$z = (4 \cdot 12 + 2 \cdot 18 + 5 \cdot 10 + 1 \cdot 25 + 7 \cdot 12)\ \$5000/\text{päivä}$$
$$= 243 \cdot \$5000/\text{päivä}$$
$$= \$\ 1.215.000\ /\text{päivä}$$



Kuljetetut määrät (milj gallonaa/päivä)

5. Kuljetusreitti logistisen verkon lähtösolmun 1 ja päätesolmun 6 välillä on mahdollista johtaa useita eri teitä välillä olevia solmuja 2 – 5 käyttäen. Liikenne solmujen välillä voi tapahtua kumpaan suuntaan hyvänsä.. Verkon rakenne on alla olevan kuvion mukainen. Solmujen välisiin kaariin liittyvät luvut ilmaisevat välimatkoja solmujen välillä.



Etsi Dijkstran algoritmia, joko graafista (käsin ratkaistaessa yksinkertaisempi) tai taulukkomuotoista, hyväksi käyttäen lyhin reitti solmusta 1 solmuun 6. (Verkon yksinkertaisuudesta johtuen ratkaisu on pääteltävissä verraten suoraviivaisesti ilman algoritmiakin, mutta tehtävän tarkoituksena on nimenomaan testata algoritmin tuntemusta).

pysyvä	1	2	3	4	5	6
1	[0,–]*					
2	*	[13,1]*	~~[18,1]~~		~~[22,1]~~	
3	*	*	[15,2]*	[17,2]	~~[21,2]~~	~~[34,2]~~
4	*	*	*	[17,2]*	[19,3]	~~[34,2]~~
5	*	*	*	*	[19,3]*	~~[32,4]~~
6	*	*	*	*	*	[29,5]*

Lyhin polku

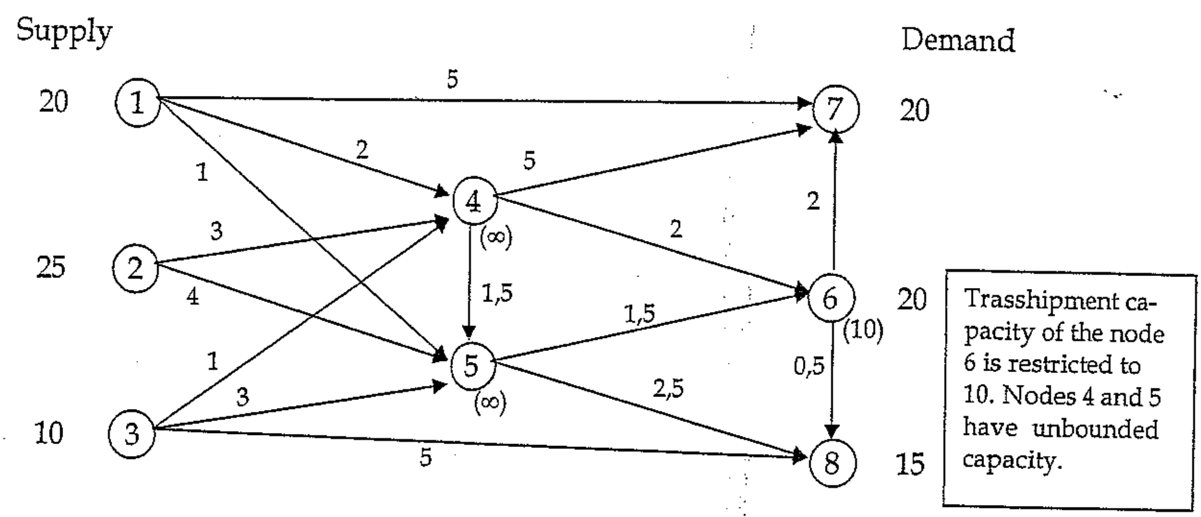
$$1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 6$$

pituus $t_{12} + t_{23} + t_{35} + t_{56}$

$= 13 + 2 + 4 + 10$

$= \underline{29}$

5. The following network shows the manner in which cars can be shipped from the three plants (nodes 1,2 and 3) by way of three distribution centers (nodes 4,5 and 6) to three car dealers (nodes 6,7 and 8). The shipping costs per car (in \$1000) are shown on the arcs. Note that node 6 combined a distribution center and a car dealership.



Determine the minimum shipping costs using the transshipment algorithm.

	4	5	6	7	8	
1	2	1	X M	5	X M	20
2	3	4	X M	X M	X M	25
3	1	3	X M	X M	5	10
4	0	1,5	2	5	X M	55
5	X M	0	1,5	X M	2,5	55
6	X M	X M	0	2	0,5	10
	55	55	30	20	15	175

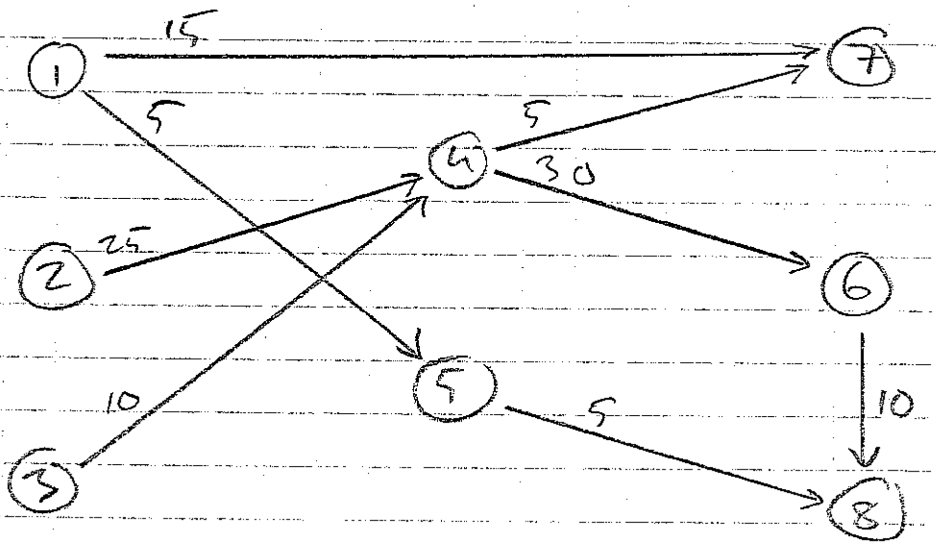
$\Delta = 30$

		4	5	6	7	8	
		0	1,5	3	5	4	
1	0	2 / −2	1 / 0,5	X / M	5 / 20	X / M	20
2	3	3 / 25	4 / 0,5	X / M	X / M	X / M	25
3	1	1 / 10	3 / −0,5	X / M	X / M	5 / 0	10
4	0	0 / 20	1,5 / $-\Delta$ 35	2 / $+\Delta$	5 / 0	X / M	55
5	−1,5	X / M	0 / $+\Delta$ 20	1,5 / $-\Delta$ 30	X / M	2,5 / 5	55
6	−3,5	X / M	X / M	0 / −0,5	2 / −0,5	0,5 / 10	10
		55	55	30	20	15	

$\Delta = 5$

	0	1,5	2	5	4
0	2 / −2	1 / $+\Delta$ 0,5	X / M	5 / $-\Delta$ 20	X / M
3	3 / 25	4 / 0,5	X / M	X / M	X / M
1	1 / 10	3 / −0,5	X / M	X / M	5 / 0
0	0 / 20	1,5 / $-\Delta$ 5	2 / 30	5 / $+\Delta$ 0	X / M
−1,5	X / M	0 / 50	1,5 / −1	X / M	2,5 / 5
−3,5	X / M	X / M	0 / −0,5	2 / −0,5	0,5 / 10

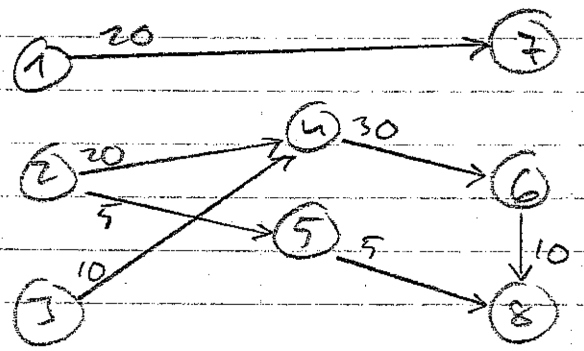
		4	5	6	7	8
		0	1	2	5	3,5
1	0	2; −2	1; 5	X; M	5; 15	X; M
2	3	3; 25	4; 0	X; M	X; M	X; M
3	1	1; 10	3; −1	X; M	X; M	5; −0,5
4	0	0; 20	1,5; −0,5	2; 30	5; 5	X; M
5	−1	X; M	0; 50	1,5; −0,5	X; M	2,5; 5
6	−3	X; M	X; M	0; −1	2; 0	0,5; 10

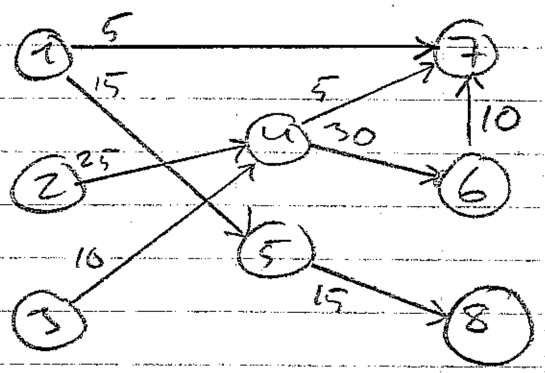


Minimum cost

$$z = 5\cdot 1 + 15\cdot 5 + 25\cdot 3 + 10\cdot 1 + 30\cdot 2 + 5\cdot 5 + 5\cdot 3{,}5 + 10\cdot 0{,}5$$
$$= 5 + 75 + 75 + 10 + 60 + 25 + 12{,}5 + 5$$
$$= 267{,}5$$

	0	1	2	5	3,5
0	2; −2	1; 0	X M	5; 20	X M
3	3; 20	4; 5	X M	X M	X M
1	1; 10	3; −1	X M	X M	5; −0,5
0	0; 25	1,5; −0,5	2; 30	5; 0	X M
−1	X M	0; 50	1,5; −0,5	X M	2,5; 5
−3	X M	X M	0; −1	2; 0	0,5; 10





	0	1	2	5	3,5
0	2; −2	1; 15	X M	5; 5	X M
3	3; 25	4; 0	X M	X M	X M
1	1; 10	3; −1	X M	X M	5; −0,5
0	0; 20	1,5; −0,5	2; 30	5; 5	X M
−1	X M	0; 40	1,5; −0,5	X M	2,5; 15
−3	X M	X M	0; −1	2; 10	0,5; 0