VAASAN YLIOPISTO
Talousmatematiikka
Prof. Ilkka Virtanen

OPERAATIOANALYYSI ORMS.1020

Tentti 2.2.2008

1. Yrityksen tavoitteena on minimoida tuotannosta ja varastoinnista aiheutuvat kustannukset 4 viikon pituisena ajanjaksona. Tietyllä viikolla valmistettu tuote on käytettävissä kysynnän myötä kulutukseen joko kyseisen viikon aikana tai se voidaan varastoida ja käyttää jonakin myöhempänä viikkona. Varaston suuruus viikon 1 alussa on 250 tuoteyksikköä. Viikkojen 2 – 4 alkuvaraston tulee olla vähintään 50 tuoteyksikköä. Valmistuksen yksikkökustannukset ovat 150 €/tuoteyksikkö ja viikosta seuraavaan siirtyvien tuotteiden varastoinnista aiheutuva yksikkökustannus on 15 €/ tuoteyksikkö. Seuraavassa taulukossa on esitetty viikoittaiset tuotantokapasiteetit ja kysynnät. Kysyntä on pystyttävä viikoittain tyydyttämään.

Viikko	Tuotantokapasiteetti	Kysyntä
1	800	900
2	700	600
3	600	800
4	800	600
Yhteensä	2900	2900

Tuotantoteknisistä syistä tuotannon on kunakin viikkona oltava vähintään 500 tuoteyksikköä. Varastointikustannuksia ei sovelleta viimeisen periodin (viikon 4) lopussa varastossa mahdollisesti oleviin tuotteisiin. Viimeisen viikon loppua ei myöskään koske vaatimus 50 yksikön vähimmäisvarastosta seuraavaa viikkoa varten.

Formuloi yrityksen yhdistetty tuotanto-varastointi -ongelma LP-mallin muotoon. Tavoitteena on tuotannosta ja varastoinnista syntyvien kustannusten minimointi. Huomaa kaikki erityyppiset rajoitteet. Formuloitua mallia ei tarvitse ratkaista.

Ohje. Valitse päätösmuuttujiksi viikoittaiset tuotantomäärät x_i, i=1,2,3,4. Mallinnus voidaan tehdä pelkästään näitä muuttujia (ja annettuja parametreja) käyttäen. Mallin käsittely kuitenkin yksinkertaistuu, mikäli otetaan käyttöön apumuuttujat d_i, i=1,2,3,4. Apumuuttujalla d_i merkitään viikon i lopussa varastoon jäävien (ja seuraavaan kauteen siirtyvien) tuoteyksiköiden lukumäärää (= edelliseltä viikolta siirtyneet tuotteet + viikon tuotanto – viikon kysyntä). On huomattava, että nämä muuttujat eivät ole päätösmuuttujia, vaan ne on hyvä ottaa käyttöön täydentäviksi apumuuttujiksi mallin rakenteen yksinkertaistamiseksi.

Saat ylimääräiset 2 bonuspistettä, mikäli purat x_i ja d_i -muuttujien avulla formuloidun mallin pelkästään varsinaisten päätösmuuttujien x_i avulla lausutuksi.

2. Tarkastellaan kanonisessa muodossa annettua lineaarisen optimoinnin tehtävää, jossa on n päätösmuuttujaa ja m rajoite-ehtoa. Tehtävä on maksimointitehtävä. Alla on lueteltu joukko tehtävän Simplex-algoritmiratkaisuun liittyviä toteamuksia (lauseet a – f), joista puuttuu johtopäätös. Mahdolliset johtopäätökset on lueteltu ratkaisuun liittyvinä ominaisuuksina (numerot 1 – 8). Tehtävänäsi on määrittää, mikä ominaisuuksista 1 – 8 liittyy mihinkin toteamukseen a – f:

a. Jos kaikki täytemuuttujat ovat optimiratkaisussa = 0, niin _____
b. Jos optimitaulun 0- (z-) rivillä m:n muuttujan sarakkeessa on kerroin 0, niin _____
c. Jos kantamuuttujalla on optimiratkaisussa arvo 0, niin _____
d. Jos keinomuuttujalla (artificial variable) on optimiratkaisussa positiivinen arvo, niin _____
e. Jos taulukon (ei-kantamuuttujan) pivot-sarakkeessa kaikki kertoimet ovat ≤ 0, niin _____
f. Jos ei-kantamuuttujalla on optimitaulun 0- (z-) rivillä kerroin = 0, niin _____

Vaihtoehtoiset ominaisuudet:
1. optimiratkaisu on yksikäsitteinen
2. optimiratkaisu on monikäsitteinen
3. optimiratkaisussa kaikki päätösmuuttujat ovat = 0
4. optimiratkaisu on degeneroitunut (kaksi- tai useampikertainen ratkaisu)
5. varjohinnat ovat duaalimuuttujien arvojen käänteislukuja
6. tehtävällä ei ole käypää ratkaisua
7. tehtävällä ei ole äärellistä ratkaisu (rajoittamaton käypä alue)
8. rajoitteet ovat kaikki kriittisiä, ne toteutuvat optimiratkaisussa yhtälöinä

3. Tarkastellaan epäyhtälömuodossa annettua lineaarisen optimoinnin tehtävää (LP-mallin kanoninen muoto):

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max z} = & 5x_1 + 2x_2 \\[1em]
\text{Ehdoin} & 2x_1 + x_2 \le 100 \\
 & x_1 + x_2 \le 80 \\
 & x_1 \le 40 \\
 & x_1, \quad x_2 \ge 0
\end{array}
$$

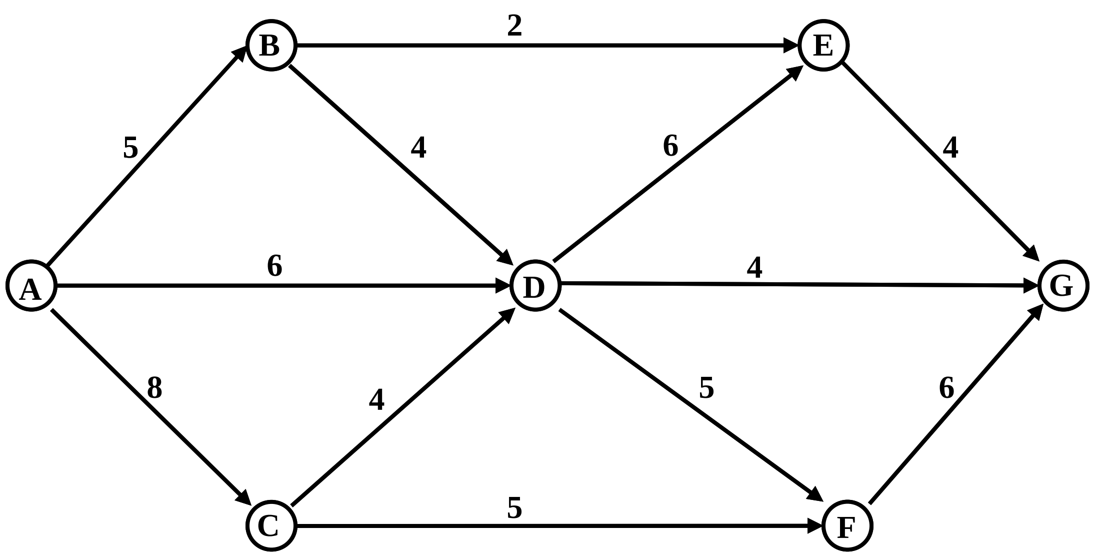
a) Ratkaise malli esimerkiksi graafisesti.
b) Suorita tavoitefunktiossa muuttujan x_1 kertoimen (= 5) herkkyystarkastelu (esimerkiksi graafiseen tarkasteluun tukeutuen): missä rajoissa kerroin voi vaihdella ilman, että optimiratkaisu muuttuu; miten optimitulos muuttuu kertoimen muuttuessa näissä rajoissa?
c) Suorita ensimmäisen rajoitteen oikean puolen kertoimen (= 100) herkkyystarkastelu: missä rajoissa kerroin voi vaihdella ilman, että optimikanta muuttuu; miten muuttuvat optimiratkaisu ja -tulos kertoimen vaihdellessa näissä rajoissa?

4. Neljä julkisin varoin rahoitettua tutkimusprojektia on tarkoitus antaa neljän eri tutkimuslaboratorion tehtäväksi siten, että kukin laboratorioista saa yhden projektin suorittaakseen. Jokainen laboratorioista on antanut hintatarjouksen kustakin projektista. Tarjoukset on esitetty alla olevassa taulukossa (hinnat yksiköissä 100 000 €):

Projekti	**Sandy Lab**	**Furmy Lab**	**Xenonne Lab**	**Liverly Lab**
Cryogenic cache memory	12	15	10	14
Spotted owl habitat	8	10	6	9
Pentium oxide depletion	20	22	18	12
Glactic genome mapping	10	12	8	16

Miten tutkimusprojektit tulisi allokoida eri tutkimuslaboratorioille, jotta kokonaiskustannukset muodostuisivat mahdollisimman pieniksi? Ratkaise ongelma unkarilaista algoritmia käyttäen. Mikäli unkarilainen metodi on sinulle vieras, voit saada puolet tehtävän maksimipistemäärästä formuloimalla probleeman ”normaalin” (probleeman erityispiirteet huomioon ottavaan) LP-mallin muotoon. Tällöin mallin formulointi riittää, tehtävää ei tarvitse ratkaista.

5. Tarkastellaan alla olevan kuvan esittää yksisuuntaista tiedonsiirtoverkkoa. Tiedot kerätään tai generoidaan solmussa A ja ne on siirrettävä mahdollisimman nopeasti, verkon maksimaalista välityskapasiteettia käyttäen solmuun G, missä tietoa käsitellään ja talletetaan. Solmujen välisten kaarten välityskapasiteetit on merkitty kaarten yhteyteen. Suuriko tietovirta verkossa on mahdollista saada aikaan?



Tentissä saa olla mukana tavanomaiset matemaattisten aineiden apuvälineet: taulukkokirja (MAOL tai vastaava) ja laskin.

OPERAATIOANALYYSI ORMS.1020

Tentti 2.2.2008

1. x_i = tuotanto viikolla i, $i = 1,2,3,4$

d_i = viikolta i viikolle $i+1$ siirtyvä varasto (apumuuttuja)

$$d_1 = 250 + x_1 - 900 = x_1 - 650$$
$$d_2 = d_1 + x_2 - 600 = x_1 + x_2 - 1250$$
$$d_3 = d_2 + x_3 - 800 = x_1 + x_2 + x_3 - 2050$$
$$d_4 = d_3 + x_4 - 600 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2650$$

Malli (x_i- ja d_i- muuttujia käyttäen)

$$\min\ z = 150(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 15(d_1 + d_2 + d_3)$$

Ehdoin

(i)
$$500 \le x_1 \le 800$$
$$500 \le x_2 \le 700$$
$$500 \le x_3 \le 600$$
$$500 \le x_4 \le 800$$

(ii)
$$d_1 \ge 50$$
$$d_2 \ge 50$$
$$d_3 \ge 50$$
$$d_4 \ge 0$$

(iii) $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$ (toteutuu ehtojen (i) perusteella)

Bonusosuus:

Malli x_i - muuttujien avulla

$$d_1 + d_2 + d_3 = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3950$$

$$150 \sum_{i=1}^{4} x_i + 15 \sum_{i=1}^{3} d_i = 195x_1 + 180x_2 + 165x_3 + 150x_4 - 59250$$

$d_1 \geq 50 \Rightarrow x_1 - 650 \geq 50 \Rightarrow x_1 \geq 700$

$d_2 \geq 50 \Rightarrow x_1 + x_2 - 1250 \geq 50 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 1300$

$d_3 \geq 50 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq 2100$

$d_4 \geq 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2650$

Lopullinen malli:

$$\min z = 195x_1 + 180x_2 + 165x_3 + 150x_4 - 59\,250$$

ehdoin

$$\begin{cases} x_1 & \geq 700 \\ x_1 & \leq 800 \\ x_2 & \geq 500 \\ x_2 & \leq 700 \\ x_1 + x_2 & \geq 1300 \\ x_3 & \geq 500 \\ x_3 & \leq 600 \\ x_1 + x_2 + x_3 & \geq 2100 \\ x_4 & \geq 500 \\ x_4 & \leq 800 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \geq 2650 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Ratkaisu:

$x_1 = 800$

$x_2 = 700$

$x_3 = 600$

$x_4 = 550$

$z = 404250$ €

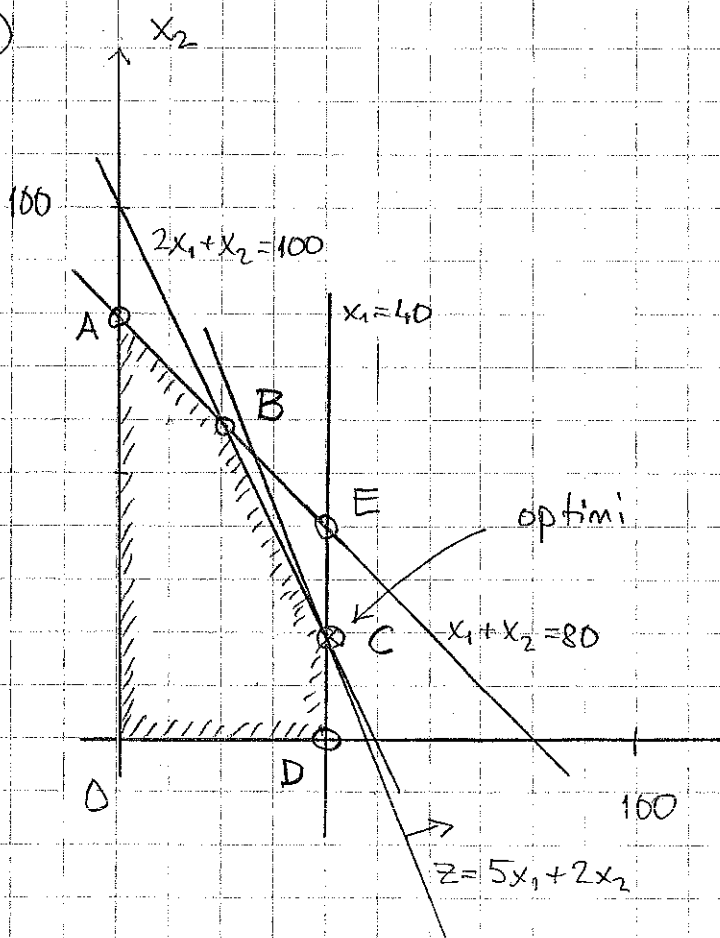
2. a — 8
b — 1
c — 4
d — 6
e — 7
f — 2

3. $\max z = 5x_1 + 2x_2$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 100 \\ x_1 + x_2 &\le 80 \\ x_1 &\le 40 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

a)



$$\begin{cases} x_1 = 40 \\ x_2 = 20 \end{cases} \quad z = 240$$

b) tavoitefunktion $z = 5x_1 + 2x_2$ kulmakerroin on

$$x_2 = \left(-\frac{5}{2}\right)x_1 + \frac{z}{2} \qquad k = -\frac{5}{2}$$

Optimipistettä rajoittavien suorien kulmakertoimet ovat

$$x_1 = 40 \qquad kk_1 = -\infty$$

$$2x_1 + x_2 = 100 \qquad kk_2 = -2$$

Ratkaisu säilyy optimaalisena niin kauan kun tavoitesuora säilyy em. rajoitteden välissä

$$-\infty < k \leq -2$$

eli $-\infty < -\frac{c_1}{2} \leq -2$

$$\Rightarrow \qquad 4 \leq c_1 < \infty$$

Tuloksen muutos:

$$c_1 \to \infty \quad \Rightarrow \quad z_{max} \to \infty$$

$$c_1 \to 4 \quad \Rightarrow \quad z_{max} \to 200$$

$$\underset{(c_1=4)}{200} \leq z_{max} < \underset{(c_1 \to \infty)}{\infty}$$

c) Rajoite $2x_1 + x_2 \leq 100$ on aktiivinen $\Rightarrow$ ratkaisu muuttuu heti, kun $b_1 = 100$ muuttuu, kanta säilyy tietyssä rajoissa

Kun b_1 kasvaa, rajoite siirtyy "itä-koilliseen". Kantaratkaisu muuttuu (tarkasteltava rajoite tulee ei-aktiiviseksi), kun rajoite siirtyy yli E:n (rajahetkellä B, E ja C yhtyvät)

$$2x_1 + x_2 = b_1$$

Pisteessä $(x_1, x_2) = (40, 40)$ on

$$2 \cdot 40 + 40 = \underline{\underline{120 = b_1}} \qquad z = 5 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 280$$

Kun b_1 pienenee, kannan muutos tapahtuu rajoitteen kulkiessa pisteiden A ja D kautta (tällöin A ja B yhtyvät, samoin C ja D), optimi pisteessä D

Pisteessä $(x_1, x_2) = (40, 0)$ on

$$2 \cdot 40 + 0 = \underline{\underline{80 = b_1}} \qquad z = 5 \cdot 40 + 2 \cdot 0 = 200$$

Kanta säilyy, kun $80 \le b_1 \le 120$

Ratkaisu muuttuu: $(40, x_2)$, $0 \le x_2 \le 40$

Tulos muuttuu $200 \le z_{max} \le 280$

4.

	Sandy	Furmy	Xenonne	Liverly
Cryog.	12	15	10	14
Spotted	8	10	6	9
Pentium	20	22	18	12
Glactic	10	12	8	16

Unkarilainen menetelmä

$$\begin{matrix} 12 & 15 & 10 & 14 \\ 8 & 10 & 6 & 9 \\ 20 & 22 & 18 & 12 \\ 10 & 12 & 8 & 16 \end{matrix} \xrightarrow[\text{vähennys}]{\text{riviminimien}} \begin{matrix} 2 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 8 & 10 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 8 & 10 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{matrix} \xrightarrow[\text{vähennys}]{\text{sarakeminimien}} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{matrix}$$

Nollien peitto vaaka- ja pystysuorilla suorilla, montako tarvitaan?

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{matrix}$$

Tarvitaan vähintään 4 = rivien (ja sarakkeiden) lukumäärä

$\Rightarrow$ optimi saavutettu

Poimitaan 4 kpl nollia, jokaiselta riviltä yksi ja jokaiselta sarakkeelta yksi. Neljä ratkaisua:

$$\begin{bmatrix} \times & & & \\ & & \times & \\ & & & \times \\ & \times & & \end{bmatrix} \text{ tai } \begin{bmatrix} \times & & & \\ & \times & & \\ & & & \times \\ & & \times & \end{bmatrix} \text{ tai } \begin{bmatrix} & & \times & \\ & \times & & \\ & & & \times \\ \times & & & \end{bmatrix} \text{ tai } \begin{bmatrix} & & \times & \\ \times & & & \\ & & & \times \\ & \times & & \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 12 & & & \\ & & 6 & \\ & & & 12 \\ & 12 & & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 12 & & & \\ & 10 & & \\ & & & 12 \\ & & 8 & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & & 10 & \\ & 10 & & \\ & & & 12 \\ 10 & & & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & & 10 & \\ 8 & & & \\ & & & 12 \\ & 12 & & \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = 42 \qquad \Sigma = 42 \qquad \Sigma = 42 \qquad \Sigma = 42$$

Kustannukset annettu yksiköissä 100 000 €

$\Rightarrow$ minimikustannukset 4,2 milj. €

LP-malli:

x_{ij} = projekti i kohdistetaan laboratoriolle j.

c_{ij} = tästä aiheutuvat kustannukset

$x_{ij} = 1$, jos i kohdistetaan j:lle

$x_{ij} = 0$ muulloin

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$ (c_{ij}:t taulukosta)

(i)
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, & i = 1,2,3,4 \\ \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1, & j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

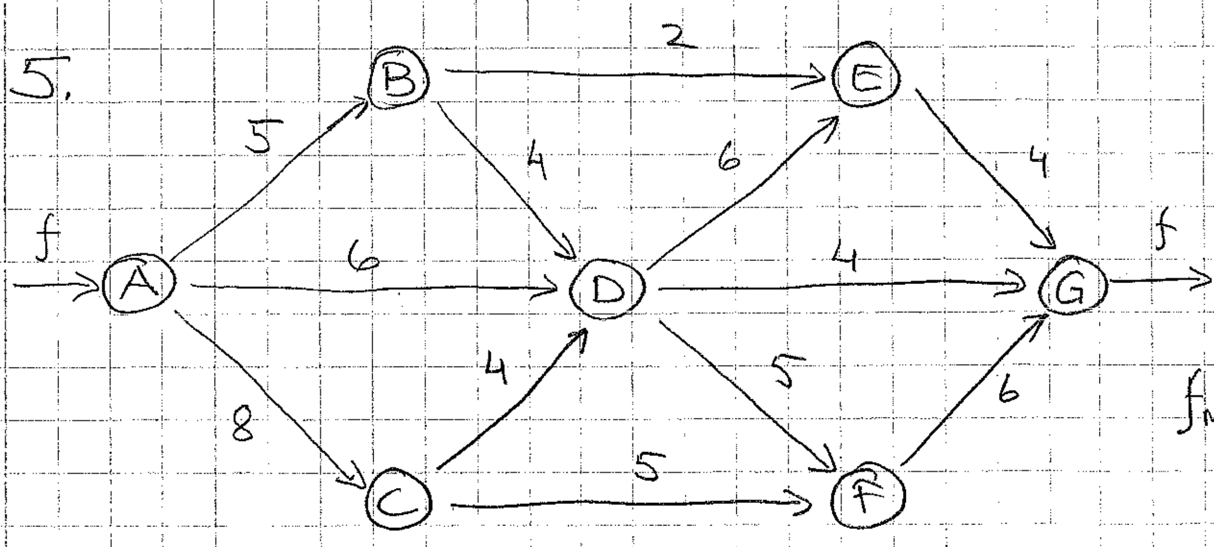
(proj. tulee jollekin laboratoriolle j)

(lab. j saa jonkin projekteista i)

(ii) $x_{ij} = 0$ tai 1, $i = 1,2,3,4$; $j = 1,2,3,4$

(tulee kokonaislukuratkaisu – vieläpä 0-1 ratkaisu – vaikka rajoitukset (ii) olisivat tavanomaista muotoa $x_{ij} \geq 0$)

5.



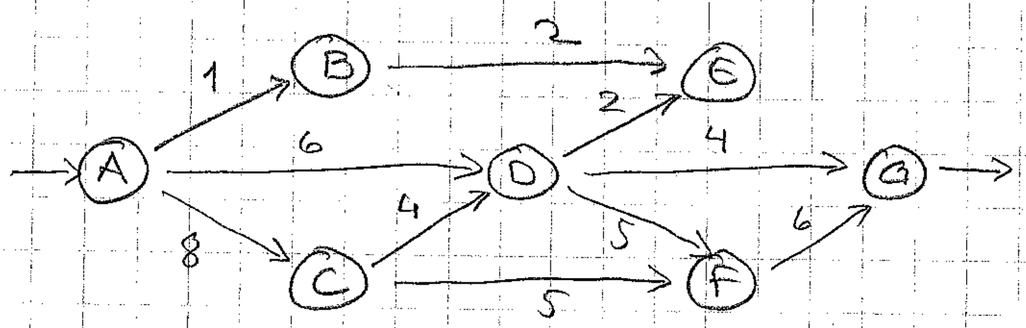
$f_{max} = ?$

Iteraatio 1

Polku P_1: $A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{4} D \xrightarrow{6} E \xrightarrow{4} G$

P_1:n kapasiteetti $= 4$

Jäljellä olevat kapasiteetit

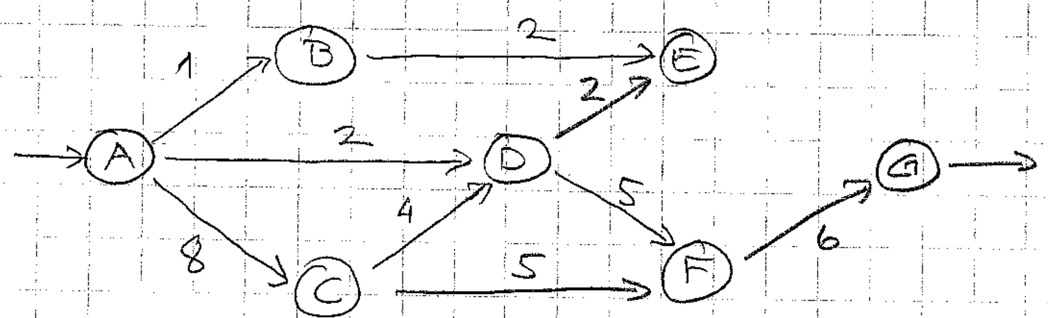


Iteraatio 2:

Polku P_2: $A \xrightarrow{6} D \xrightarrow{4} G$

P_2:n kapasiteetti $= 4$ $\qquad P_1 + P_2 = 8$

Jäljellä olevat kapasiteetit

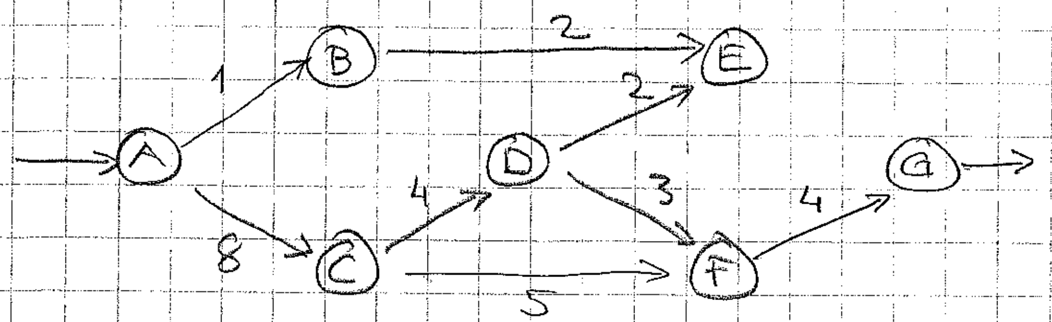


Iteraatio 3:

Polku 3: $A \xrightarrow{2} D \xrightarrow{5} F \xrightarrow{6} G$

P_3:n kapasiteetti $= 2$ $\qquad P_1 + P_2 + P_3 = 10$

Jäljellä olevat kapasiteetit

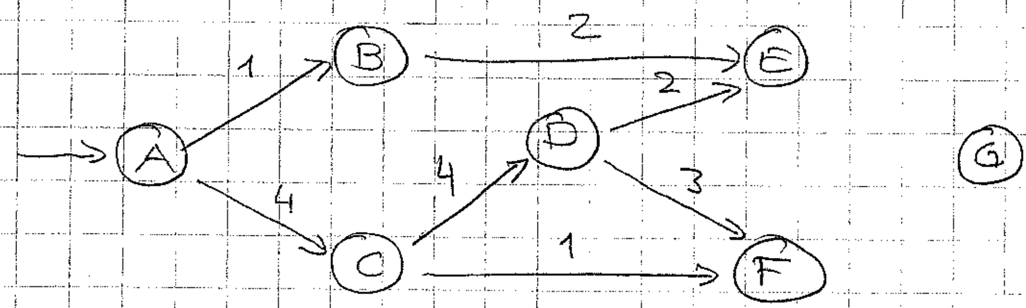


Iteraatio 4:

Polku 4: $A \xrightarrow{8} C \xrightarrow{5} F \xrightarrow{4} G$

P_4:n kapasiteetti $= 4$ $\quad P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 14$

Jäljellä olevat kapasiteetit



Ei enää polkua A:sta G:hen. Polut P_1, P_2, P_3 ja P_4 yhdessä muodostavat maksimivirtauksen. Viimeinen graafi yllä ilmoittaa käyttämättömät kapasiteetit. Maksimivirtaus verkossa $= 14$: