LAPPEENRANNAN TEKNILLINEN KORKEAKOULU

YLEISTENTIETEIDEN LAITOS

LAPPEENRANTA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF PHYSICS AND MATHEMATICS

KUMULATIIVISTEN TODENNÄKÖISYYKSIEN YKSISUUNTAISET CHEBYSHEV-TYYPPISET RAJAT ERÄIDEN YLEISTEN JAKAUMAPERHEIDEN TAPAUKSESSA

Ilkka Virtanen

1979

ISBN 951-763-112-X

LAPPEENRANTA
FINLAND

KUMULATIIVISTEN TODENNÄKÖISYYKSIEN YKSISUUNTAISET CHEBYSHEV-TYYPPISET RAJAT ERÄIDEN YLEISTEN JAKAUMAPERHEIDEN TAPAUKSESSA *

1 Johdanto

Tässä työssä tarkastellaan satunnaismuuttujaan liittyviä kumulatiivisia todennäköisyyksiä sellaisissa tapauksissa, joissa satunnaismuuttujan jakaumasta käytettävissä oleva informaatio on hyvin niukkaa. Tunnetuin tulos tällä alueella on kuuluisa Chebyshevin (tai Bienaymé-Chebyshevin) epäyhtälö, joka pätee kaikille jakaumille kunhan vain jakauman kaksi ensimmäistä momenttia ovat äärellisinä olemassa.
Chebyshevin epäyhtälön tavanomainen esitysmuoto on

$$P\{|X-\mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2} , \tag{1}$$

missä $\mu = E(X)$ on satunnaismuuttujan X jakauman odotusarvo ja $\sigma = D(X)$ sen hajonta ja k on mielivaltainen positiiviluku.

Chebyshevin epäyhtälö antaa tunnetusti myös tiukimmat mahdolliset rajat (1):n vasemmalla puolella esiintyvälle todennäköisyydelle. Sen sijaan epäyhtälölle on olemassa lukuisa määrä yleistyksiä, kun em. momenttien lisäksi on käytettävissä muutakin informaatiota jakaumasta. Oletettuna lisäinformaationa on useimmiten jakauman tietyn tyyppinen sileys tai tunnetut korkeammat momentit (hyvän kuvan olemassaolevista Chebyshevin lauseen yleistyksistä saa tutustumalla C.L. Mallows'in [3] ja H.J. Godwin'in [2] tutkimuksiin ja niissä viitattuun lähdekirjallisuuteen).

* Tutkimuksen aiheesta samoin kuin käytetyn menetelmällisen lähestymistavan viitoittamisesta olen kiitollinen professori Pentti Malaskalle.

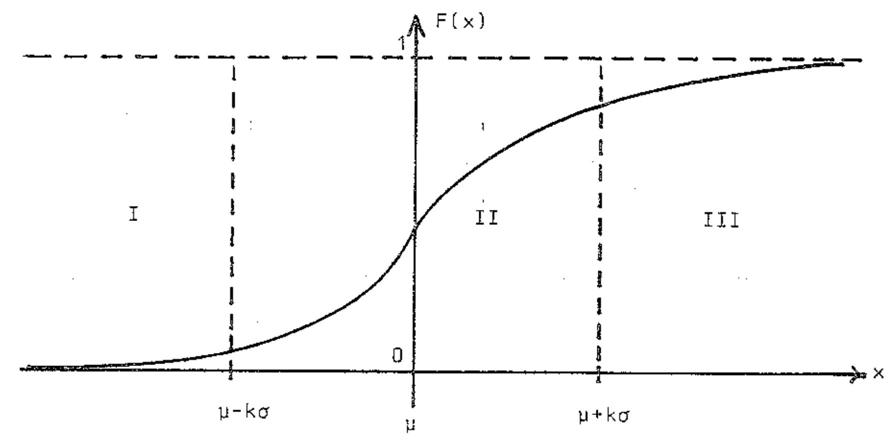
Tässä työssä pyritään epäyhtälön (1) yksisuuntaiseen yleistykseen sekä perustilanteessa (vain jakauman odotusarvon ja hajonnan olemassaolo tunnettuna) että eräissä muissa tapauksissa, kun jakauman luonteesta on enemmän informaatiota käytettävissä. Tulosten johtaminen perustuu kertymäfunktion yleisiin ja kussakin tapauksessa oletettuihin erityisiin ominaisuuksiin ja niihin liittyvään geometriseen tarkasteluun. Oletetut ominaisuudet omaavat jakaumat voivat kulkea vain tietyissä tason osissa. Tämän sallitun alueen reunakäyrät johtavat tiettyihin äärijakaumiin, joiden perusteella saadaan etsityt epäyhtälömuotoiset rajat todennäköisyyksille.

Yksisuuntaiset rajat johtavat kahdenlaiseen täsmennykseen perustulokseen (1) verrattuna. Ensiksikin on mahdollista saavuttaa (ei-triviaali) tulos myös alle hajonnan päässä odotusarvosta oleville satunnaismuuttujan arvoille, ts. (1):ssä esiintyvän kertoimen k arvoille $0 < k \leq 1$. Toiseksi myös eräällä välillä $1 < k \leq k_1$ ($k_1 > 1$) on mahdollista saavuttaa tiukempi yksisuuntainen raja kuin mitä (1):stä on yksisuuntaisena suoraan saatavissa. Saadaan siis tiukempia todennäköisyysarvioita juuri sillä satunnaismuuttujan arvoalueella, joka tavallisesti on suurimman mielenkiinnon kohteena.

2 Chebyshevin epäyhtälö ja sallittujen jakaumien alue

2.1 Chebyshevin epäyhtälö

Tarkastellaan satunnaismuuttujaa X, jonka jakaumasta tiedetään vain, että sen odotusarvo ja hajonta ovat äärellisinä olemassa. Merkitään jakauman kertymäfunktiota F(x):llä ja olkoot jakauman odotusarvo ja hajonta $\mu = E(x)$ ja $\sigma = D(x)$ vastaavasti. Vaikka Chebyshevin epäyhtälön johtaminen onkin yleisesti tunnettu, suoritetaan tämä aluksi, sillä myöhemmin joudutaan viittaamaan sen eri vaiheisiin.



Kuva 1. Kertymäfunktion yleinen kulku

Kuvassa 1, jossa on skemaattisesti esitetty kertymäfunktion yleinen kulku, satunnaismuuttujan X arvoalue on jaettu kolmeen osaan, osa-alueiden rajakohtina pisteet μ-kσ ja μ+kσ. Tätä jaottelua noudattaen jakauman varianssi voidaan lausua muodossa

(2) $$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (x-\mu)^2 dF(x) + \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} (x-\mu)^2 dF(x) + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} (x-\mu)^2 dF(x).$$

Kun (2):n oikealta puolelta jätetään pois keskimmäinen integraali, joka on ei-negatiivinen (F(x) on ei-vähenevä), päästään epäyhtälöön

(3) $$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (x-\mu)^2 dF(x) + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} (x-\mu)^2 dF(x) ,$$

joka vielä voidaan kirjoittaa muotoon

(4) $$\sigma^2 \geq \int_{|x-\mu| \geq k\sigma} (x-\mu)^2 dF(x) = \int_{|x-\mu| \geq k\sigma} |x-\mu|^2 dF(x).$$

Korvaamalla (4):n jälkimmäisessä integraalissa lauseke $|x-\mu|$ alarajallaan $k\sigma$ saadaan edelleen

$$(5)\qquad \sigma^2 \ge \int_{|x-\mu|\ge k\sigma} |x-\mu|^2 dF(x) \ge \int_{|x-\mu|\ge k\sigma} (k\sigma)^2 dF(x)$$

$$= k^2\sigma^2 \int_{|x-\mu|\ge k\sigma} dF(x)$$

$$= k^2\sigma^2 P\{|X-\mu| \ge k\sigma\},$$

mistä lausekkeella $k^2\sigma^2$ puolittain jakamalla saadaan epäyhtälö (1).

2.2 Sallittujen jakaumien alue

Alueiden I ja III yhteinen todennäköisyysmassa on Chebyshevin epäyhtälön mukaan suuruudeltaan korkeintaan $1/k^2$. Tämän todennäköisyysmassan jakaantumisesta alueiden I ja III kesken ei kuitenkaan voida sanoa mitään lisää. On siis varauduttava siihen, että massa kokonaisuudessaan sijaitsee vain toisella em. alueista. Epäyhtälöstä (3) saadaan näin ylärajaksi alueen I yli lasketulle varianssi-integraalille (rajoitetaan tarkastelu k:n suhteen ei-triviaalille alueelle $k \ge 1$)

$$(6)\qquad \sigma^2 \ge \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (x-\mu)^2 dF(x),$$

mistä edellä kuvattuun tapaan saadaan edelleen

$$(7)\qquad \sigma^2 \ge \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (x-\mu)^2 dF(x) \ge k^2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} dF(x)$$

$$= k^2\sigma^2 F(\mu-k\sigma)$$

ja lausekkeella $k^2\sigma^2$ jakamalla lopuksi

$$(8)\qquad F(\mu-k\sigma) \le \frac{1}{k^2}, \quad k \ge 1.$$

Ottamalla huomioon kertymäfunktion määritelmä

$$(9)\qquad F(x) = P\{X \le x\}$$

saadaan (8):sta edelleen (arvoille $k \ge 1$)

$$(10)\qquad P\{X \le \mu-k\sigma\} \le 1/k^2$$

ja sijoituksen $\mu-k\sigma = x$ jälkeen (arvoille $x \le \mu-\sigma$)

$$(11)\qquad F(x) = P\{X \le x\} \le 1/\left(\frac{\mu-x}{\sigma}\right)^2.$$

Näin on osoitettu, että vain ehdon (11) toteuttavat kertymäfunktiot ovat sallittuja. Sallitut kertymäfunktiot kulkevat siten kaikki funktion

$$(12)\qquad F^-(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma}{x-\mu}\right)^2, & \text{kun } x < \mu-\sigma \\ 1, & \text{kun } x \ge \mu-\sigma \end{cases}$$

alapuolella tai korkeintaan yhtyvät siihen.

Vastaavalla tavalla, lähtemällä epäyhtälössä (3) liikkeelle alueen III yli lasketusta varianssi-integraalista, saadaan sallituille kertymäfunktioille alarajaksi funktio

$$(13)\qquad F^+(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < \mu+\sigma \\ 1-\left(\frac{\sigma}{x-\mu}\right)^2, & \text{kun } x \ge \mu+\sigma. \end{cases}$$

Kaikkien sallittujen, s.o. μ-odotusarvoisten ja σ-hajontaisten jakaumien kertymäfunktioiden on siten sijaittava alueella, jonka F^-- ja F^+-funktioita edustavat reunakäyrät rajaavat. Kuva 2 esittää tätä sallittujen kertymäfunktioiden aluetta. Kuvioon on lisäksi esimerkin vuoksi piirretty (μ, σ)-normaalisen ja välille $[\mu-\sigma\sqrt{3}, \mu+\sigma\sqrt{3}]$ tasaisesti jakautuneen satunnaismuuttujan kertymäfunktiot (molemmat jakaumat ovat tunnetusti μ-odotusarvoisia ja σ-hajontaisia).

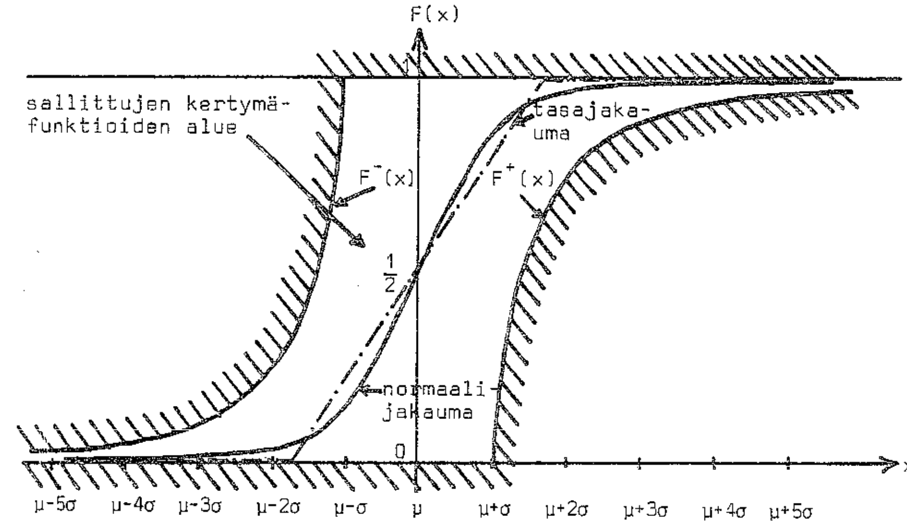
Sallittu kertymäfunktio voi osittain yhtyä näihin rajafunktioihin, ei kuitenkaan kokonaisuudessaan. Sillä rajakäyrät sinänsä eivät ole sallittuja kertymäfunktioita; ne eivät toteuta sen paremmin odotusarvo- kuin hajontaehtoakaan. Tämä nähdään helposti suoraan laskemalla (laskut suoritetaan seuraavassa vain rajajakauman F^- osalta). Odotusarvoksi saadaan

(14)
$$\mu^- = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF^-(x) = \int_{-\infty}^{\mu-\sigma} x\,dF^-(x)$$
$$= \mu + \int_{-\infty}^{\mu-\sigma} (x-\mu)\,dF^-(x)$$
$$= \mu + \int_{-\infty}^{\mu-\sigma} (x-\mu)\,d\left(\frac{\sigma}{x-\mu}\right)^2$$
$$= \mu - 2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\mu-\sigma} \frac{dx}{(x-\mu)^2}$$
$$= \mu - 2\sigma\ ,$$

ts. $\mu^- \neq \mu$, joten odotusarvoehto ei toteudu. Vastaavasti on rajajakauman F^+ odotusarvo

(15)
$$\mu^+ = \mu + 2\sigma\ ,$$

joka ei myöskään toteuta odotusarvoehtoa.



Kuva 2. Chebyshevin epäyhtälön mukaisten sallittujen jakaumien alue.

Rajajakaumien varianssit eivät ole edes äärellisinä olemassa, kuten seuraava tarkastelu F^--jakauman kohdalla osoittaa:

(16)
$$(\sigma^-)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu^-)^2 dF^-(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\mu-\sigma} (x-\mu+2\sigma)^2 dF^-(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\mu-\sigma} (x-\mu)^2 dF^-(x) + 4\sigma^2 \int_{-\infty}^{\mu-\sigma} dF^-(x) + 4\sigma \int_{-\infty}^{\mu-\sigma} (x-\mu)\,dF^-(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\mu-\sigma} (x-\mu)^2 dF^-(x) + 4\sigma^2 - 8\sigma^2$$
$$= -2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\mu-\sigma} \frac{dx}{x-\mu} - 4\sigma^2$$
$$= -2\sigma^2 \Big/_{-\infty}^{\mu-\sigma} \ln|x-\mu| - 4\sigma^2 = \infty\ .$$

Rajakäyrät eivät toteuta siten hajontaehtoakaan (hajonta = σ, äärellinen).

2.3 Rajajakaumien fraktiilit

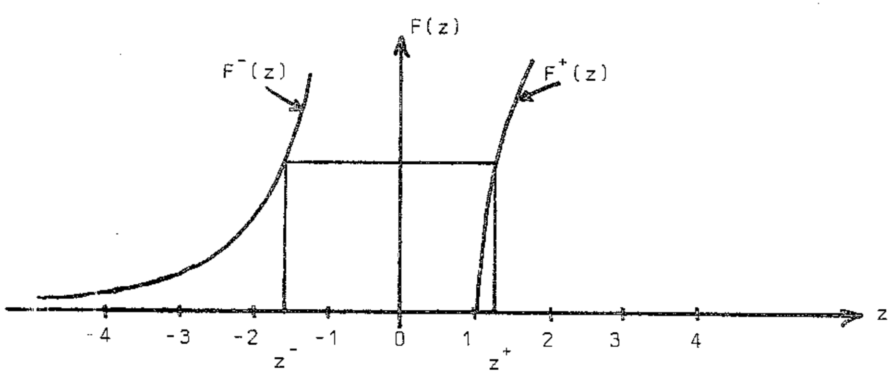
Edellä johdetut rajajakaumat F^- ja F^+ ovat varsin keskeisellä sijalla jatkotarkasteluissa. Selvitetään siksi niiden ominaisuuksia hieman lähemmin. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi siirrytään satunnaismuuttujasta X normitettuun satunnaismuuttujaan

$$(17) \qquad Z = \frac{X-\mu}{\sigma},$$

jolloin tarkasteltavien jakaumien (μ,σ)-odotusarvo- ja hajontaehto muuttuu (0,1)-ehdoksi vastaavasti.
Rajakäyrät (12) ja (13) ovat tässä uudessa koordinaatistossa nyt seuraavat (käytetään merkintöinä edelleen F^- ja F^+ muunnoksesta huolimatta):

$$(18) \qquad F^-(z) = \begin{cases} 1/z^2, \text{ kun } z < -1 \\ 1, \text{ kun } z \geq -1 \end{cases}$$

$$(19) \qquad F^+(z) = \begin{cases} 0, \text{ kun } z < 1 \\ 1-(1/z^2), \text{ kun } z \geq 1 . \end{cases}$$



Kuva 3. Rajakäyrien vastinfraktiilit.

Etsitään ensiksi yhteys rajakäyrien F^- ja F^+ vastinfraktiilien välille, ts. pisteet z^- ja z^+ siten, että

$$(20) \qquad F^-(z^-) = F^+(z^+).$$

Yhtälöistä (18) ja (19) saadaan ensin

$$(21) \qquad \frac{1}{(z^-)^2} = 1 - \frac{1}{(z^+)^2},$$

jonka ratkaisuna sitten joko

$$(22) \qquad z^+ = \frac{-z^-}{\sqrt{(z^-)^2-1}} \qquad (z^- < -1)$$

tai

$$(23) \qquad z^- = \frac{-z^+}{\sqrt{(z^+)^2-1}} \qquad (z^+ > 1)$$

Määrätään vielä rajajakaumien fraktiilit, ts. pisteet z_α^- ja z_α^+ siten, että

$$(24) \qquad F^-(z_\alpha^-) = F^+(z_\alpha^+) = \alpha \qquad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Rajajakaumalle F^- saadaan

$$(25) \qquad \frac{1}{(z_\alpha^-)^2} = \alpha ,$$

jonka ratkaisuna

$$(26) \qquad z_\alpha^- = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} .$$

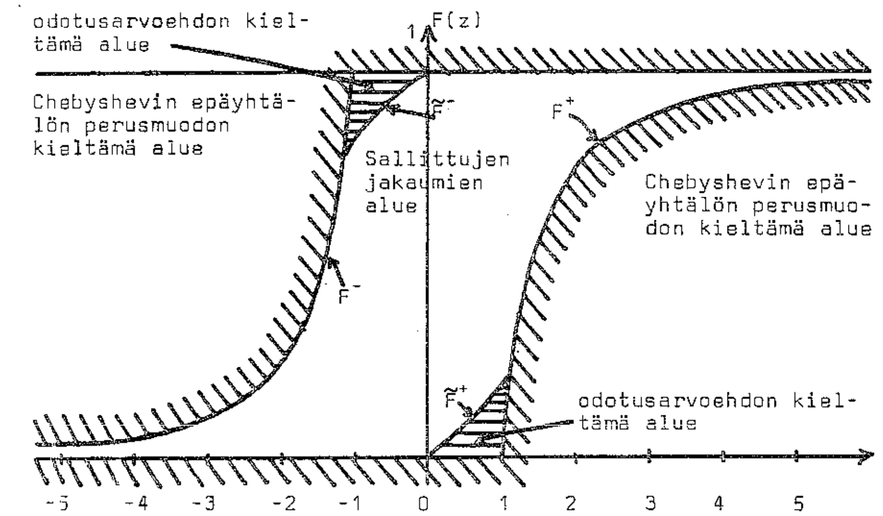
Rajajakaumalle F^+ saadaan vastaavasti

$$z_\alpha^+ = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \quad . \tag{27}$$

3 Odotusarvoehto sallittujen jakaumien alueen lisärajoitteena

Chebyshevin epäyhtälön ja sen mukaisen sallittujen jakaumien alueen johtaminen perustuivat ennen kaikkea varianssiehdon hyväksi käyttöön (varianssiehdossa on tietysti implisiittisesti myös odotusarvoehto käytössä). Seuraavaksi ryhdytään sallitun alueen edelleen rajaukseen erityisesti odotusarvoehdon perusteella: oletuksen mukaan tarkastellaan vain μ-odotusarvoisia (muunnosalueessa 0-odotusarvoisia) satunnaismuuttujia. Edellä jo osoitettiin, että rajajakaumat F^- ja F^+ eivät kuulu sallittuihin jakaumiin, koska niiden kohdalla mm. odotusarvoehto ei toteudu.

Suoritetaan tarkastelut jälleen muunnosalueessa, jolloin odotusarvo-hajontaehto on (0,1)-ehto. Jotta jakauman odotusarvo olisi = 0, on kertymäfunktion viimeistään pisteessä z = 0 saatava positiivisia arvoja, sillä muussa tapauksessa olisi koko todennäköisyysmassa positiivisella z-akselin osalla ja siten olisi $E(Z) > 0$. Vastaavasti ei kertymäfunktio ennen pistettä z = 0 voi saavuttaa arvoa $F(z) = 1$, sillä tällainen tilanne merkitsisi todennäköisyysmassan keskittymistä kokonaisuudessaan negatiiviselle z-akselin osalle ja siten negatiivista odotusarvoa. Kuvassa 2 esitettyyn sallittujen jakaumien alueeseen saadaan siten kuvan 4 tyyppiset lisärajoitusalueet.

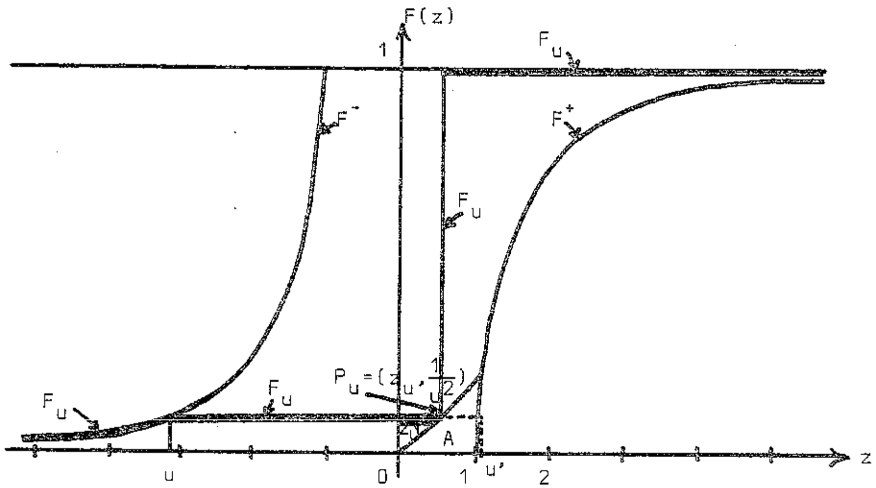


Kuva 4. Odotusarvoehdon tuomat lisärajoitukset sallittujen jakaumien alueeseen.

Tehtävänä on nyt määrätä lisärajoitusalueen reunakaarien $\tilde{F}^-$ ja $\tilde{F}^+$ yhtälöt. Suoritetaan tarkastelu kaaren $\tilde{F}^+$ osalta, kaari $\tilde{F}^-$ saadaan sen jälkeen symmetrisesti. Olkoon P_u mielivaltainen kaaren $\tilde{F}^+$ piste ja $F_u(z)$ pisteeseen P_u liittyvä kertymäfunktio, joka on määritelty seuraavasti (ks. kuva 5)

$$F_u(z) = \begin{cases} F^-(z) = 1/z^2, & \text{kun } z < u \\ F^-(u) = 1/u^2, & \text{kun } u \leq z < z_u \\ 1, & \text{kun } z \geq z_u \quad . \end{cases} \tag{28}$$

Yhtälössä (28) on z_u toistaiseksi tuntematon. Piste P_u ja kertymäfunktio F_u on siis parametrisoitu u:n suhteen, joka ilmoittaa kohdan, jossa F_u erkanee rajakäyrältä F^-. Tuntemattoman suureen z_u määräämiseksi käytetään nyt odotusarvoehtoa: jakauman (28) odotusarvon on oltava = 0.



Kuva 5. Kaaren $\tilde{F}^{+}$ määritys.

Saadaan

(29) $$0 = \int_{-\infty}^{\infty} z dF_u(z)$$

$$= \int_{-\infty}^{u} z d(\frac{1}{z^2}) + z_u(1 - \frac{1}{u^2})$$

$$= \frac{2}{u} + z_u(1 - \frac{1}{u^2}) ,$$

mistä

(30) $$z_u = - \frac{2u}{u^2-1} .$$

Vielä on varmistauduttava siitä, että funktio (28) on kokonaisuudessaan rajakäyrien F^- ja F^+ rajoittamalla alueella. Näin on, mikäli (vrt. yhtälö (22))

(31) $$z_u \leq u' = \frac{-u}{\sqrt{u^2-1}} ,$$

ts. mikäli

(32) $$- \frac{2u}{u^2-1} \leq - \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} .$$

Tästä saadaan ehto u:lle (u:n valinnan perusteella tiedetään, että $u < -1$)

(33) $$u \leq - \sqrt{5}$$

ja edelleen z_u:lle

(34) $$0 < z_u \leq \sqrt{5}/2 .$$

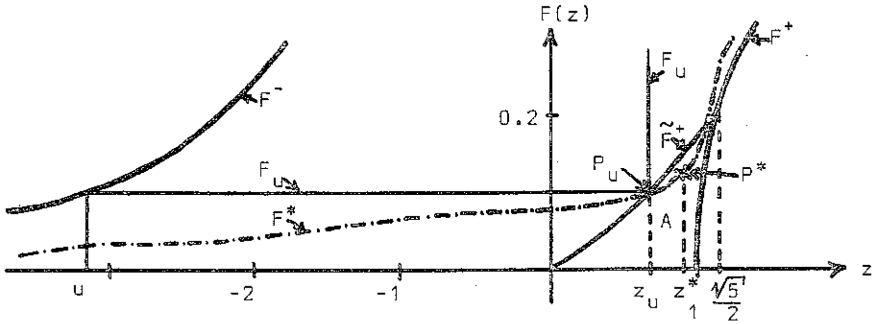
Kun nyt parametri u kulkee yli välin $(-\infty, -\sqrt{5}]$, piirtää piste

(35) $$P_u = (- \frac{2u}{u^2-1} , \frac{1}{u^2})$$

käyrän kaaren $\tilde{F}^{+}(z)$ välillä $(0, \sqrt{5}/2]$. Kaari $\tilde{F}^{+}$ todella rajaa uuden alueen (alue A kuvassa 5) pois sallittujen jakaumien alueesta. Sillä oletetaan, että olisi olemassa sallittu kertymäfunktio F^*, joka kulkee alueella A olevan pisteen $P^* = (z^*, F^*(z^*))$ kautta (ks. kuva 6). Funktio F^* leikkaa kaaren $\tilde{F}^{+}$ ensimmäisen kerran eräässä pisteessä $P_u = (z_u, \tilde{F}^{+}(z_u))$. Konstruoidaan nyt pisteeseen P_u liittyvä F_u-kertymäfunktio (yhtälö (28)). Kertymäfunktiolle $F^*(z)$ pätee tällöin kaikilla z:n arvoilla epäyhtälö

(36) $$F^*(z) \leq F_u(z), \qquad -\infty < z < +\infty ,$$

sillä väleillä $(-\infty, u]$ ja $[z_u, \infty)$ $F_u(z)$ kulkee sallitun alueen ylärajalla ja välillä (u, z_u) se on vakio $1/u^2$, jota arvoa mikään pisteen P_u kautta kulkeva kertymäfunktio (ei siis myöskään F^*) voi tällä välillä ylittää.



Kuva 6. Sallittujen jakaumien alueen rajaus odotusarvoehdon perusteella.

Lisäksi on voimassa aito epäyhtälö välillä $[z_u, z^*]$, ts.

(37) $$F^*(z) < F_u(z), \qquad z_u \le z \le z^* .$$

Ehdoista (36) ja (37) seuraa tunnetusti

(38) $$\mu^* > \mu_u = 0 ,$$

missä μ^* ja μ_u ovat jakaumien F^* ja F_u odotusarvot. On siis välttämättä $\mu^* > 0$, mikä on kuitenkin vastoin oletusta, että F^* olisi sallittu kertymäfunktio. Näin on osoitettu, että odotusarvoehdon perusteella konstruoitu $\tilde{F}^+$ muodostaa F^+:aa tiukemman alarajaehdon sallituille kertymäfunktioille välillä $0 < z \le \sqrt{5}/2$.

Kaaren $\tilde{F}^+$ yhtälö parametrimuodossa on yhtälö (35). Ratkaistussa muodossa yhtälö on

(39) $$\tilde{F}^+(z) = \frac{2 + z^2 - 2\sqrt{1+z^2}}{z^2}, \qquad 0 < z \le \sqrt{5}/2 .$$

Symmetrian nojalla on

(40) $$\tilde{F}^-(z) = 1 - \tilde{F}^+(-z), \qquad -\sqrt{5}/2 \le z < 0 ,$$

joten sallitulle alueelle saadaan välillä $[-\sqrt{5}/2, 0)$ uusi yläraja (vrt. kuva 4)

(41) $$\tilde{F}^-(z) = \frac{2(\sqrt{1+z^2} - 1)}{z^2}, \qquad -\sqrt{5}/2 \le z < 0 .$$

Odotusarvoehto ja sen käyttö jakauman (28) konstruoinnissa muodostavat jatkotarkastelujen menetelmällisen perustan. Seuraavassa pykälässä esitetään menetelmän tuottamat tulokset eräissä tapauksissa, kun jakaumasta perustilanteen (odotusarvo ja hajonta äärellisinä olemassa) ohella on vain vähän tai ei lainkaan lisäinformaatiota käytettävissä.

4 Tulokset

4.1 Perustapaus

Oletetaan tässä jaksossa, että jakaumasta on tiedossa vain odotusarvon ja hajonnan olemassaolo, ts. toimitaan vastaavan informaation varassa kuin Chebyshevin epäyhtälöä (1) johdettaessa. Pykälän 3 tarkastelujen perusteella, vrt. yhtälöt (39) ja (41), saadaan

(42) $$P\{X-\mu \ge k\sigma\} = P\{Z \ge k\} \le 1 - \tilde{F}^+(k)$$
$$= (2/k^2)(\sqrt{1+k^2} - 1), \qquad 0 < k < \sqrt{5}/2$$

(43) $$P\{X-\mu \le -k\sigma\} = P\{Z \le -k\} \le \tilde{F}^-(-k)$$
$$= (2/k^2)(\sqrt{1+k^2} - 1), \qquad 0 < k < \sqrt{5}/2 .$$

Yksisuuntaiset rajat (42) ja (43) ovat voimassaoloalueellaan Chebyshevin epäyhtälöä vahvemmat. Saadaanhan nyt ensinnäkin alle hajonnan päähän odotusarvosta ulottuvien tapahtumien $\{X-\mu \geq k\sigma\}$ ja $\{X-\mu \leq -k\sigma\}$, $k \leq 1$, todennäköisyyksille ei-triviaalit, s.o. ykköstä pienemmät, rajat (Chebyshevin epäyhtälö antaa arvoilla $k \leq 1$ vain triviaalin tuloksen $P \leq 1$). Välillä $1 < k < \sqrt[4]{5}/2$ on $(2/k^2)(\sqrt[4]{1+k^2} - 1) < 1/k^2$, joten myös tällä alueella epäyhtälöt (42) ja (43) rajaavat jakauman toispuolisia lievetodennäköisyyksiä voimakkaammin kuin mitä (1):n perusteella voidaan päätellä.

Mikäli siis tarvitaan todennäköisyysarviota vain toista jakauman lievettä koskien, kuten on laita esimerkiksi yksisuuntaisessa testauksessa tai puoliavointa väliestimaattia muodostettaessa, tuottavat (42) ja (43) välillä $0 < k < \sqrt[4]{5}/2$ paremman arvion kuin mitä (1):stä on saatavissa. Yhdistettynä molempia liepeitä koskevaksi kaksisuuntaiseksi epäyhtälöksi eivät (42) ja (43) luonnollisestikaan pysty (1):tä tiukentamaan, mikä ei yleensäkään ole mahdollista.

4.2 Odotusarvon suhteen symmetriset jakaumat

Oletetaan seuraavaksi, että jakaumasta tiedetään odotusarvon ja hajonnan olemassaolon lisäksi jakauman symmetrisyys odotusarvon suhteen. Tällainen tilanne voi syntyä esimerkiksi mittaustehtävän yhteydessä, jolloin mittausvirheen jakaumasta ei ole muuta tietoa kuin, että mittauksen voidaan olettaa olevan vailla systemaattista virhettä (satunnaisvirheen odotusarvo = 0 ja siten äärellinen), mittauksella on tietty äärellinen (epä)tarkkuus (satunnaisvirheen hajonta on äärellinen) ja tietynasteiset positiiviset ja negatiiviset mittausvirheet ovat keskenään yhtä todennäköisiä; mittauksen satunnaisvirheen jakauma kuuluu tällöin alussa kuvattuun jakaumaperheeseen.

Symmetristen jakaumien perhe on Chebyshevin epäyhtälöä ajatellen jossain määrin paradoksaalinen. Sillä onhan tieto jakauman

symmetrisyydestä selvä lisäinformaatio Chebyshevin epäyhtälön perusolettamuksiin verrattuna. Kuitenkin juuri symmetriset diskreetit jakaumat, joilla on todennäköisyysmassa $1/2k^2$ kummassakin pisteistä $x = \mu \pm k\sigma$ ja todennäköisyysmassa $1 - (1/k^2)$ pisteessä $x = \mu$ (ks. [1], s. 183), aikaansaavat tilanteen, jossa epäyhtälö (1) toteutuu yhtälönä, ts.

$$P\{|X-\mu| \geq k\sigma\} = \frac{1}{k^2} . \tag{44}$$

Näiden jakaumien luokka siis osoittaa, että Chebyshevin epäyhtälöä ei (kaksisuuntaisena) voida yleisessä tapauksessa parantaa. Sallittujen jakaumien alueeseen ja yksisuuntaisiin epäyhtälöihin symmetriaehto sen sijaan tuo huomattavat täsmennykset. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi suoritetaan jatkotarkastelut jälleen normitetun satunnaismuuttujan Z avulla.

Perustuloksen (1) ja symmetriaehdon perusteella voidaan kirjoittaa

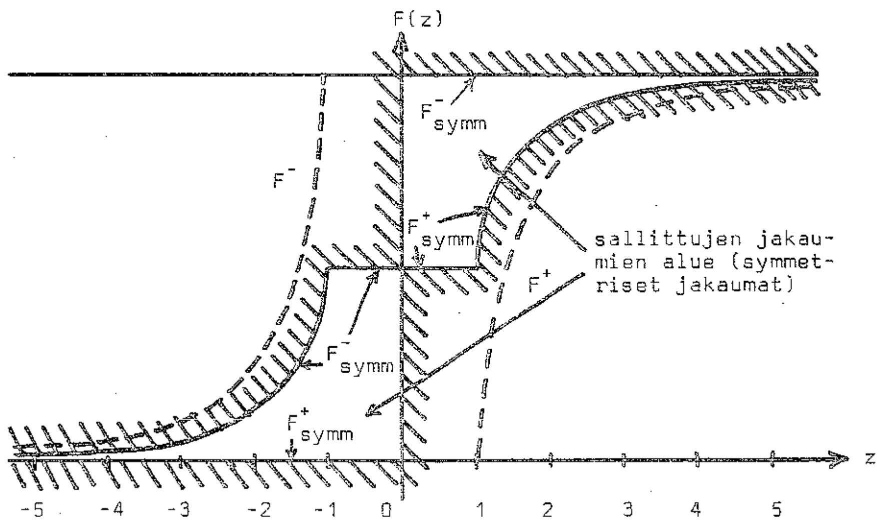
$$\begin{aligned} 1/k^2 &\geq P\{|Z| \geq k\} = P\{Z \geq k\} + P\{Z \leq -k\} \\ &= 2P\{Z \geq k\} = 2P\{Z \leq -k\} , \end{aligned} \tag{45}$$

josta

$$P\{Z \geq k\} = P\{Z \leq -k\} \leq 1/2k^2 . \tag{46}$$

Epäyhtälöiden (46) perusteella saadaan sallittujen jakaumien alueelle nyt seuraavat reunakäyrät (ks. myös kuva 7)

$$F^+_{symm}(z) = \begin{cases} 0, \text{ kun } z < 0 \\ 1/2, \text{ kun } 0 \leq z < 1 \\ 1 - 1/2z^2, \text{ kun } z \geq 1 \end{cases} \tag{47}$$



Kuva 7. Sallittujen jakaumien alue symmetrisille jakaumille.

(48) $$F^-_{symm}(z) = \begin{cases} 1/2z^2, \text{ kun } z < -1 \\ 1/2, \text{ kun } -1 \leq z < 0 \\ 1, \text{ kun } z \geq 0 \end{cases}$$

Kuvassa 7 esitettyä sallittujen jakaumien aluetta ei ilman lisäinformaatiota voida enää supistaa, sillä edellä mainittu diskreetti jakauma, jossa todennäköisyysmassat $1/2k^2$, $1-(1/k^2)$ ja $1/2k^2$ sijaitsevat pisteissä $-k$, 0 ja $+k$ vastaavasti, saadaan k:n sopivalla valinnalla kulkemaan minkä tahansa ko. alueen pisteen kautta.

Symmetristen jakaumien "yksisuuntaiset Chebyshevin epäyhtälöt" ovat (47):n ja (48):n perusteella nyt

(49) $$P\{X-\mu \geq k\sigma\} = P\{X-\mu \leq -k\sigma\} \leq \begin{cases} 1/2, \text{ kun } 0 < k \leq 1 \\ 1/2k^2, \text{ kun } k > 1 \text{ .} \end{cases}$$

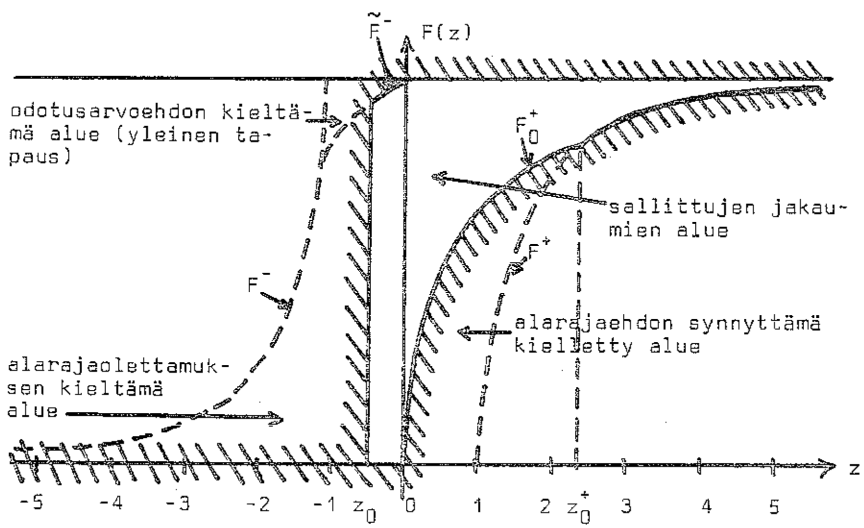
4.3 Alaspäin tai ylöspäin rajoitetut jakaumat

Tarkastellaan seuraavaksi jakaumia, joista odotusarvon ja hajonnan olemassaolon lisäksi tiedetään, että koko todennäköisyysmassa on erään äärellisen arvon $x = x_0$ ylä- tai alapuolella. Suoritetaan yksityiskohtainen tarkastelu äärellisen alarajan omaavien jakaumien tapauksessa, ylöspäin rajoitettuihin jakaumiin liittyvä tulos seuraa analogisesti. Siirrytään jälleen normitettuun satunnaismuuttujaan, jolloin alarajaa $x = x_0$ ($x_0 < \mu$) vastaa z-alueella raja $z = z_0$ ($z_0 < 0$) ja käytettävissä oleva lisäolettamus on

(50) $$P\{Z < z_0\} = 0 \text{ .}$$

Alkuperäisen, kuvan 2 esittämän sallittujen jakaumien alueen supistuminen riippuu nyt paitsi määrällisesti myös laadullisesti rajaluvun z_0 suuruudesta. Olkoon ensin $-1 \leq z_0 < 0$, ts. z_0 sijaitsee alueella, jossa F^--käyrä on saavuttanut ylärajansa 1 (vrt. kuva 8). Sallittujen jakaumien alue supistuu nyt kahdesta suunnasta. Olettamuksen perusteella tiedetään ensiksikin, että todennäköisyysmassa ei voi sijaita z_0:n vasemmalla puolella. Jotta nyt odotusarvoehto $E(Z) = 0$ toteutuisi, on todennäköisyysmassan myös positiivisella z-akselin osalla "siirryttävä" kohti origoa, näin saadaan myös lisärajoitus F_0^+ eräälle välille $0 < z \leq z_0^+$. Rajakäyrä F_0^+ konstruoidaan vastaavaan tapaan kuin rajakäyrä $\tilde{F}^+$ pykälässä 3. Olkoon $P_\alpha = (z_\alpha, \alpha)$ mielivaltainen kaaren F_0^+ piste ja $F_\alpha(z)$ tähän pisteeseen liittyvä seuraavasti määritelty kertymäfunktio

(51) $$F_\alpha(z) = \begin{cases} 0, \text{ kun } z < z_0 \\ \alpha, \text{ kun } z_0 \leq z < z_\alpha \\ 1, \text{ kun } z \geq z_\alpha \text{ .} \end{cases}$$



Kuva 8. Sallittujen jakaumien alueen supistuminen alaraja-
ehdon perusteella.

Piste P_α ja funktio F_α on siis parametrisoitu α:n, pisteen $z = z_0$ pistetodennäköisyyden mukaan. Odotusarvoehdon perusteella saadaan yhtälö pisteen $P_\alpha = (z_\alpha, \alpha)$ koordinaattien välille (ks. kuva 9)

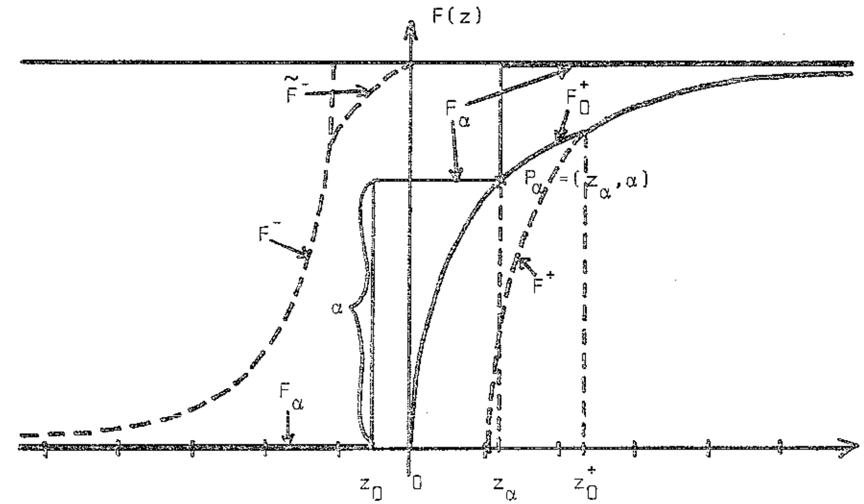
(52) $$0 = E(Z) = z_0 \cdot \alpha + z_\alpha(1-\alpha) ,$$

jonka ratkaisu on

(53) $$\alpha = \frac{z_\alpha}{z_\alpha - z_0} .$$

Kaaren F_0^+ yhtälö on siten

(54) $$F_0^+(z) = \frac{z}{z-z_0} , \quad 0 \le z \le z_0^+ .$$



Kuva 9. Rajakäyrän F_0^+ konstruointi $(-1 \le z_0 < 0)$.

Kaari F_0^+ muodostaa sallitun alueen alarajan niin kauan kuin se on ankarampi kuin alkuperäinen raja F^+, ts. z_0^+ on käyrien F_0^+ ja F^+ leikkauspisteen z-koordinaatti. Pisteen z_0^+ määrittämiseksi saadaan näin yhtälö

(55) $$F_0^+(z_0^+) = \frac{z_0^+}{z_0^+ - z_0} = 1 - (1/z_0^+)^2 = F^+(z_0^+),$$

jonka ratkaisu on

(56) $$z_0^+ = - \frac{1 + \sqrt{1+4z_0^2}}{2z_0} .$$

Kaari F_0^+ osoitetaan sallitun alueen alarajaksi vastaavalla tavalla kuin $\tilde{F}^+$ pykälässä 3: jokainen pisteen P_α kautta kulkeva ja F_0^+- ja F^+-käyrien väliselle alueelle ulottuva kertymäfunktio tuottaa jakaumalle positiivisen odotusarvon, ts. tällainen kertymäfunktio ei voi edustaa sallittua jakaumaa.

Sallittujen jakaumien kertymäfunktioiden on välttämättä kuljettava käyrän F_0^+ yläpuolella. Alaspäin rajoitetuille jakaumille saadaan tarkasteltavassa tapauksessa ($-1 \le z_0 < 0$) näin rajajakaumien F_0^+ ja F^+ avulla yksisuuntainen Chebyshev-epäyhtälö

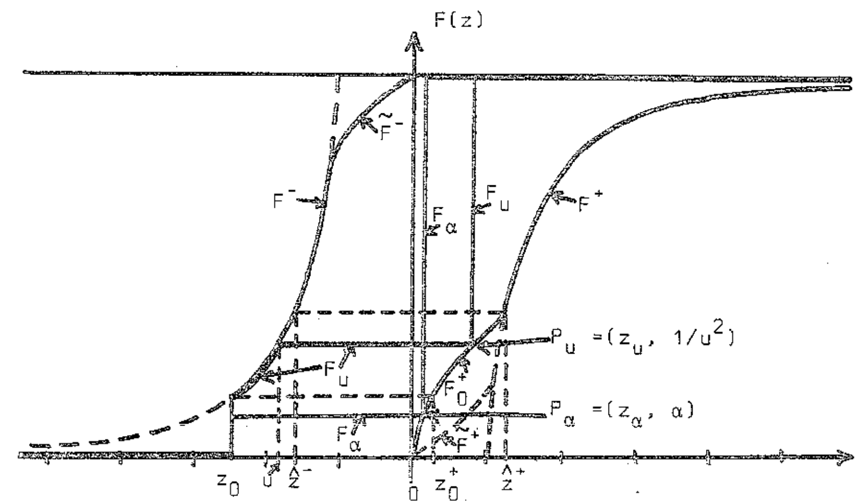
$$
(57) \qquad P\{Z \ge k\} \le \begin{cases} 1-F_0^+(k) = \dfrac{z_0}{z_0-k}, & \text{kun } 0 \le k \le -\dfrac{1+\sqrt{1+4z_0^2}}{2z_0} \\[2ex] 1-F^+(k) = 1/k^2, & \text{kun } k > -\dfrac{1+\sqrt{1+4z_0^2}}{2z_0} \end{cases}
$$

Alkuperäiselle muuttujalle $X = \mu+\sigma Z$ muunnettuna epäyhtälö kuuluu, kun vielä on merkitty $x_0 = \mu - a\sigma$ (jakauman alaraja x_0 sijaitsee odotusarvosta a-kertaisen hajonnan päässä, $a = -z_0$ edellä)

$$
(58) \qquad P\{X-\mu \ge k\sigma\} \le \begin{cases} \dfrac{a}{a+k}, & \text{kun } 0 \le k \le (1+\sqrt{1+4a^2})/2a \\[2ex] 1/k^2, & \text{kun } k > (1+\sqrt{1+4a^2})/2a \end{cases}
$$

Tuloksesta (58) on vielä syytä huomauttaa, että epäyhtälön oikean puolen rajat pätevät myös kaksisuuntaisessa muodossa, ts. todennäköisyydelle $P\{|X-\mu| \ge k\sigma\}$, alueella $k > a$. Tämä on suora seuraus alarajaolettamuksesta (50). Epäyhtälön (58) voimassaoloalue $0 < a \le 1$ voidaan myöhemmin vielä laajentaa alueeksi $0 < a \le \sqrt{2}$.

Oletetaan toiseksi, että jakauman alaraja z_0 sijaitsee alueella $z_0 < -1$, ts. alueella, jossa F^- jo muodostaa aidon rajoituksen sallituille jakaumille. Rajakäyrän F_0^+ konstruointi tapahtuu nyt kuvan 10 mukaisesti. Välillä $0 \le z \le z_0^+$ käyrä syntyy pisteen $P_\alpha = (z_\alpha, \alpha)$ urana ($0 < \alpha \le 1/z_0^2$), missä pisteen P_α koordinaatit määräytyvät "tasapainojakauman" F_α avulla, vrt. yhtälöt (51)-(53). Kaaren F_0^+ yhtälö välillä $0 \le z \le z_0^+$ on siten yhtälö (54).



Kuva 10. Rajakäyrän F_0^+ konstruointi ($z_0 < -1$).

Piste z_0^+ saadaan nyt ehdosta

$$
(59) \qquad F_0^+(z_0^+) = F^-(z_0),
$$

ts. yhtälön

$$
(60) \qquad \frac{z_0^+}{z_0^+ - z_0} = \frac{1}{z_0^2}
$$

ratkaisuna

$$
(61) \qquad z_0^+ = \frac{z_0}{1 - z_0^2} .
$$

Välillä $z_0^+ \le z \le \hat{z}^+$ käyrä syntyy pisteen P_u urana ($z_0 \le u \le \hat{z}^-$), missä pisteen $P_u = (z_u, 1/u^2)$ koordinaatit määräytyvät jakauman

(62)
$$F_u(z) = \begin{cases} 0, \text{ kun } z < z_0 \\ 1/z^2, \text{ kun } z_0 \le z < u \\ 1/u^2, \text{ kun } u \le z < z_u \\ 1, \text{ kun } z \ge z_u \end{cases}$$

perusteella odotusarvoehdon toteutuessa. Odotusarvoehto antaa

(63)
$$0 = E_{F_u} = z_0(1/z_0^2) + \int_{z_0}^{u} z\,d(1/z^2) + z_u[1-(1/u^2)]$$
$$= \frac{1}{z_0} + 2\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{z_0}\right) + z_u[1-(1/u^2)],$$

jonka ratkaisu on

(64)
$$z_u = \frac{u(u-2z_0)}{z_0(u^2-1)} \ .$$

Jotta piste P_u pysyisi alkuperäisellä sallitulla alueella, ts. rajakäyrän F^+ vasemmalla puolella, on oltava, vrt. yhtälö (22),

(65)
$$z_u \le \frac{-u}{\sqrt{u^2-1}} \ .$$

Ehdon (65) toteutuessa yhtälönä saadaan siitä parametrin u yläraja $\hat{z}^-$. Tämän määrittävä ehto on siten yhtälö

(66)
$$\frac{\hat{z}^-(\hat{z}^- - 2z_0)}{z_0[(\hat{z}^-)^2 - 1]} = \frac{-\hat{z}^-}{\sqrt{(\hat{z}^-)^2-1}} \ ,$$

jonka ratkaisu on

(67)
$$\hat{z}^- = \frac{-z_0(2-\sqrt{5z_0^2-1})}{z_0^2 - 1} \ .$$

Rajakäyrän $F_0^+(z)$ yhtälö välillä $z_0^+ \le z \le \hat{z}^+$, missä z_0^+ määräytyy yhtälöstä (61) ja $\hat{z}^+$ yhtälöistä (22) ja (67), on parametrimuodossa

(68)
$$P_u = \left(\frac{u(u-2z_0)}{z_0(u^2-1)}, \frac{1}{u^2}\right), \quad z_0 \le u \le \hat{z}^-$$

ja tästä johdettavissa olevassa ratkaistussa muodossa

(69)
$$F_0^+(z) = \frac{2z_0 - z + z_0 z^2 + 2\sqrt{z_0^2 + zz_0(zz_0-1)}}{z_0 z^2} \ .$$

Yhtälöiden (59)-(69) voimassaolo edellyttää, että tarkasteltava tilanne todella on kuvassa 10 esitetyn kaltainen: rajapisteen $(z_0^+, F_0^+(z_0^+))$ on sijaittava alkuperäisellä sallitulla alueella, s.o. käyrän F^+ vasemmalla puolella. Mikäli näin ei kuitenkaan ole laita (jos z_0 on lähellä arvoa -1), tapahtuu $F_0^+(z)$:n määrittely koko välillä $[0, z_0^+]$ yhtälöllä (54), missä vielä z_0^+ saadaan (61):n sijasta yhtälöstä (56). Tilanne onkin siten kuvassa 9 esitetyn kaltainen, joten kaavojen (54) ja (56) voimassaoloalue ja niiden seurauksena myös (57):n ja (58):n voimassaoloalue (z_0:n suhteen) ulottuukin -1:tä pitemmälle. Tämän voimassaoloalueen vasen päätepiste on nyt se z_0:n arvo, jolla (56):sta ja (61):stä lasketut z_0^+:n arvot yhtyvät, ts. jolla rajapiste $(z_0^+, F_0^+(z_0^+))$ sijaitsee tarkalleen F^+-käyrällä. Näin tapahtuu, kun toteutuu

(70)
$$-\frac{1+\sqrt{1+4z_0^2}}{2z_0} = \frac{z_0}{1-z_0^2} \ ,$$

ts. kun on

(71)
$$z_0 = -\sqrt{2} \ .$$

Edellä oleviin F_0^+ - käyrien johtoihin on syytä liittää eräitä muitakin huomautuksia. Pykälässä 3 todettiin kaaren $\tilde{F}^-$ muodostavan sallitun alueen ylärajan välillä $(-\sqrt{5}/2\ ,0)$. Käyrän F_0^+ konstruoinnin perustana olevia tasapainojakaumia F_α ja F_u muodostettaessa, vrt. yhtälöt (51) ja (62), tämä F^- - käyrän lisärajoitus ei kuitenkaan ollut eksplisiittisesti esillä. Voidaan kuitenkin osoittaa, etteivät F_α- ja F_u-jakaumat millään alarajan z_0 arvolla ulotu $\tilde{F}$-käyrälle saakka, joten ne $\tilde{F}^-$-rajan huomioon ottaenkin muodostuvat (51):ssä ja (62):ssa esitetyllä tavalla.

Tarkastellaan vielä kaaren F_0^+ käyttäytymistä, kun alarajaehto z_0 siirtyy yhä kauemmas negatiiviselle z-akselille. Yhtälöistä (61), (67), (22) ja (69) saadaan seuraavat raja-arvot

$$\lim_{z_0 \to -\infty} z_0^+ = 0 \tag{72}$$

$$\lim_{z_0 \to -\infty} \hat{z}^- = -\sqrt{5} \tag{73}$$

$$\lim_{z_0 \to -\infty} \hat{z}^+ = \sqrt{5}\ /\ 2 \tag{74}$$

$$\lim_{z_0 \to -\infty} F_0^+(z) = \frac{2 + z^2 - 2\sqrt{1 + z^2}}{z^2} = \tilde{F}^+(z). \tag{75}$$

Tulos (72) merkitsee, että rajalla $(z_0 \to -\infty)$ kaaren F_0^+ yhtälö saadaan koko välillä $(0,\ \hat{z}^+)$ yhtälöstä (69). Parametrin u voimassaoloalueeksi tulee (73):n perusteella $(-\infty;\sqrt{5}]$ ja funktion F_0^+ määrittelyalueeksi (74):n nojalla $(0,\sqrt{5}\ /\ 2]$. Määrittelyalueellaan F_0^+ yhtyy $\tilde{F}^+$:aan, kuten (75) osoittaa. Kaiken kaikkiaan tuloksista (72) - (75) käy ilmi, että rajakäyttäytyminen ehdolla $z_0 \to -\infty$ yhtyy perustilanteeseen (vain odotusarvon ja hajonnan olemassaolo tunnettu), kuten tietysti pitääkin.

Nyt voidaankin koota tapaukseen $z_0 < -\sqrt{2}$ liittyvät tulokset (58):aa vastaavan yksisuuntaisen Chebyshev-epäyhtälön muodostamista varten. Rajakäyrän F_0^+ (yhtälöt (54) ja (69)) ja siihen

liittyvien huomautusten perusteella on ensin

$$P\{Z \geq k\} \leq \begin{cases} 1 - F_0^+(k), \text{ kun } 0 \leq k \leq \hat{z}^+ \\ 1 - F^+(k), \text{ kun } k > \hat{z}^+, \end{cases} \tag{76}$$

missä $\hat{z}^+$ riippuu alarajasta z_0 ja saadaan tästä perättäisinä muunnoksina (67) (= suure $\hat{z}^-$) ja (22) (= suure $\hat{z}^+$), ja

$$1 - F_0^+(k) = \begin{cases} z_0/(z_0 - k), \text{ kun } 0 \leq k \leq z_0/(1 - z_0^2) \\ \dfrac{k - 2z_0 - 2\sqrt{z_0^2 + kz_0(kz_0 - 1)}}{z_0 k^2}, \text{ kun } z_0/(1 - z_0^2) < k \leq \hat{z}^+. \end{cases} \tag{77}$$

Siirtymällä vielä alkuperäiseen muuttujaan $X = \mu + \sigma Z$ ja kirjoittamalla jälleen jakauman alaraja $x_0 = \mu + \sigma z_0$ muotoon $x_0 = \mu - a\sigma$ saadaan lopullinen tulos

$$P\{X - \mu \geq k\sigma\} \leq \begin{cases} a/(a+k), \text{ kun } 0 \leq k \leq k_1 \\ \dfrac{2\sqrt{a^2 + ak(ak+1)} - 2a - k}{ak^2}, \text{ kun } k_1 < k \leq k_2 \\ 1/k^2, \text{ kun } k > k_2, \end{cases} \tag{78}$$

missä

$$k_1 = a/(a^2 - 1) \tag{79}$$

$$k_2 = \sqrt{k_3^2/(k_3^2 - 1)} \tag{80}$$

$$k_3 = a(2 - \sqrt{5a^2 - 1})/(a^2 - 1). \tag{81}$$

Tulos (78) on voimassa, kun $a > \sqrt{2}$; arvoilla $0 < a \leq \sqrt{2}$ pätee epäyhtälö (58).

Ylöspäin rajoitettujen jakaumien tapauksessa, ts. kun satunnaismuuttujan arvojoukko on puoliavoin väli $(-\infty,\mu + a\sigma]$, ovat todennäköisyyksille $P\{X - \mu \leq -k\sigma\}$, $k>0$, saatavat rajat analogiset (58):n ja (78):n kanssa. Niitä on siten tarpeetonta kirjoittaa erikseen näkyviin. Mikäli taas tiedetään, että satunnaismuuttuja on jakautunut eräälle äärelliselle välille $[\mu - a\sigma, \mu + b\sigma]$, saadaan sallittujen jakaumien alueelle lisärajoituksia sekä alhaalta että ylhäältä päin: F^+ ja F^- korvautuvat niitä tiukemmilla F_0^+:lla ja F_0^-:lla eräässä origon ympäristössä. Tarkastelu hajoaa parametrien a ja b suuruussuhteista riippuen kuitenkin jo niin moneen osaan ja merkinnät tulevat sen verran monimutkaisiksi, että ko. jakaumien luokkaa ei tässä yhteydessä lähemmin käsitellä.

4.4 Yhteenveto

Chebyshevin epäyhtälö antaa arvokasta tietoa satunnaismuuttujaan liittyvistä todennäköisyyksistä varsinkin sellaisissa tapauksissa, joissa satunnaismuuttujan jakaumasta on vain vähän informaatiota käytettävissä. Epäyhtälön teoreettinen merkitys on varsin suuri, onhan se luonteeltaan hyvin yleinen edellyttäen vain melkeinpä minimi-informaation tarkasteltavasta jakaumasta. Käytännön tutkimustilanteissa epäyhtälön merkitys on kuitenkin jäänyt vähäisemmäksi johtuen todennäköisyysarvioiden voimakkaasta konservatiivisuudesta tavallisimmin esiintyvien jakaumatyyppien yhteydessä. Tässä tutkimuksessa todennäköisyysarvioita on osittain tiukennettu niissä tapauksissa, jolloin arvioita tarvitaan vain jakauman toista lievettä koskevina.

Chebyshevin epäyhtälössä jakauman hajonnalla (varianssilla) on varsin keskeinen sija, epäyhtälö mm. johdetaankin varianssin lausekkeesta lähtien. Tässä tutkimuksessa on varianssiehdon (jakaumalla on äärellinen varianssi) rinnalle otettu toisen perusolettamuksen mukainen odotusarvoehto (jakaumalla on äärellinen odotusarvo). Tätä ehtoa soveltamalla voidaan osoittaa, että osa Chebyshevin epäyhtälön mukaisista sallituista jakaumista onkin sellaisia, että ne eivät toteuta molempia epäyhtälön perusolettamuksia. Sallittujen jakaumien

alueen supistumisen mukana tiukkenevat myös yksisuuntaisiin kumulatiivisiin todennäköisyyksiin liittyvät arviot. Näin tapahtuu ennen kaikkea alle hajonnan päähän odotusarvosta ulottuville tapahtumille, joille nyt saadaan ei-triviaalit todennäköisyysarviot.

Tutkimuksen menetelmällisesti keskeisin sisältö on pykälässä 3. Siinä on esitetty, miten odotusarvoehtoa hyväksi käyttäen konstruoidaan äärimmäinen odotusarvoehdon toteuttava tasapainojakauma, joka puolestaan määrittää uudet, entistä tiukemmat rajat sallittujen jakaumien alueelle. Tulosten purkaminen yksisuuntaiseen Chebyshev-tyyppiseen muotoon samoin kuin epäyhtälöiden konstruointi eri olettamusten vallitessa (eri jakaumaperheille) on esitetty omassa neljännessä pykälässään. Tämän pykälän tarkastelut eivät pyri niinkään kattavuuteen jakaumaperheiden osalta kuin esitetyn menetelmän esimerkinomaiseen ja yksityiskohdittain kuvattuun soveltamiseen. Vastaavalla tavalla voidaan ottaa huomioon kaikki muu tarkasteltavan jakauman ominaisuuksia koskeva lisäinformaatio yleistä tapausta parempien todennäköisyysarvioiden muodostamiseksi.

KIRJALLISUUSLUETTELO

[1] Cramér, H., Mathematical Methods of Statistics, Uppsala 1945

[2] Godwin, H.J., On Generalizations of Tchebychef's Inequality, Journal of the American Statistical Association, 50 (1955) 923 - 945

[3] Mallows, C.L., Generalizations of Tchebycheff's Inequalities, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 18 (1956) 139 - 176

ONE-SIDED BOUNDS OF THE TCHEBYCHEFF TYPE FOR SOME GENERAL CLASSES OF DISTRIBUTIONS

Summary

The paper deals with bounds on the probability values of a random variable in such a case, when information about the distribution of the variate is only scantily available.
The best known result in this area is the celebrated Tchebycheff's inequality, which only assumes that the first two moments of the distribution must exist.
Although the result of Tchebycheff's inequality

(i) $$P\{|X-\mu| \geq k\sigma\} \leq 1/k^2$$

cannot be improved in the general case, there exists a lot of stronger inequalities, when more information about the distribution is available. The most extensive results (references [2] and [3]) are those which depend on the knowledge of some higher moments or smoothness of the distribution.

The present work contains one-sided generalizations of inequality (i) both under the basic conditions (only the existence of the first two moments is known) and in such cases when some additional information about the distribution of the variate is available. The method in deriving the generalizations is based on the properties of the cumulative distribution function (cdf): the admissible cdf's, i.e. the cdf's fulfilling the assumptions made, can pass only through certain parts of the plane. The boundaries of the admissible cdf-region lead to certain extremal distributions and hence to the required inequalities.

The starting point of the analysis is the basic form of Tchebycheff's inequality, which is derived first in section 2.

This section also contains the derivation of the primary admissible cdf-region, the region determined by the extremal distribution functions F^- and F^+ (Fig. 2). The properties of the extremal distributions are also considered.

Section 3 presents the methodological framework of the study. In Tchebycheff's inequality the variance of the distribution has the main role, the derivation of the inequality e.g. starts from the expression of the variance. Now in this study, up to the variance assumption (the distribution has a finite variance) it is taken the expectation assumption (the distribution has a finite expectation). Using this condition it is shown that one part of the primary admissible cdf-region (region A in Figs. 5 and 6) does not fulfill both of the basic assumptions; the admissible cdf's cannot go beyond $\tilde{F}^+$ or $\tilde{F}^-$. Thus, along with the reduction of the admissible cdf-region, tigher one-sided bounds for the cumulative probabilities are obtained.

The new inequalities are more efficient than (i) in two senses, viz.,

1^0 when for the values of k less than 1 inequality (i) gives only the trivial result $P \leq 1$, we can now obtain non-trivial one-sided bounds of the type (i) for all values of k

2^0 also for the values of k between 1 and some k_1 ($k_1 > 1$), we get stronger one-sided bounds than those resulting from (i).

Section 4 contains the results of the study. The method of section 3 is applied under different conditions, different types and different amounts of information about the distribution being available, to get the bounds of the admissible cdf-region. These bounds are then transformed to one-sided Tchebycheff-inequalities. The paper contains one-sided ine-

qualities for the following general classes of distributions.

I All distributions (with finite expectation and variance)

$$\text{(ii)} \qquad \left.\begin{array}{l} P\{X-\mu \geq k\sigma\} \\ P\{X-\mu \leq -k\sigma\} \end{array}\right\} \leq \begin{cases} (2/k^2)(\sqrt{1+k^2} - 1), & 0<k<\sqrt{5}/2 \\ 1/k^2, & k \geq \sqrt{5}/2 \end{cases}$$

Inequality (ii) shows that for the values of k between 0 and $\sqrt{5}/2$ the one-sided bound (ii) gives information which is not derivable from the basic inequality (i).

II Distributions symmetrical about the expectation

$$\text{(iii)} \qquad P\{X-\mu \geq k\sigma\} = P\{X-\mu \leq -k\sigma\} \leq \begin{cases} 1/2, & 0 < k < 1 \\ 1/2k^2, & k \geq 1 \end{cases}$$

Inequality (iii) is a direct consequence from the symmetry of the distribution and it is stronger than (i) for all values of k.

III Distributions with semi-infinite range:
$X \in [\mu-a\sigma,\infty)$ or $X \in (-\infty, \mu+a\sigma]$

For the case $X \in [\mu-a\sigma, \infty)$ holds, if $0 \leq a \leq \sqrt{2}$,

$$\text{(iv)} \qquad P\{X-\mu \geq k\sigma\} \leq \begin{cases} \frac{a}{a+k}, & 0 \leq k < (1+\sqrt{1+4a^2})/2a \\ 1/k^2, & k > (1+\sqrt{1+4a^2})/2a \end{cases}$$

and, if $a > \sqrt{2}$,

$$\text{(iv)'} \qquad P\{X-\mu \geq k\sigma\} \leq \begin{cases} \frac{a}{a+k}, & 0 \leq k < k_1 \\ \frac{2\sqrt{a^2+ak(ak+1)}-2a-k}{ak^2}, & k_1 \leq k < k_2 \\ 1/k^2, & k \geq k_2, \end{cases}$$

where $k_1 = k_1(a)$ and $k_2 = k_2(a)$, see equations (79)-(81) in the text. The bounds for the case $X \in (-\infty, \mu+a\sigma]$ are analogical to (iv) and (iv)'.