

1 JOHDANTO

Ch: johdanto

1.1 Opintojakson ”Lineaarialgebra” kuvaus 2014

SEC:ojkuvaus

Koodi ja laajuus: MATH.1040, 5op.

Edellytykset: Lähtötasotestin hyväksytty suoritus.

Osaamistavoitteet: opintojakson jälkeen opiskelija osaa ratkaista minkä tahansa lineaarisen yhtälöryhmän ja osaa tulkita myös kaikki mahdolliset erikoistapaukset, opiskelija osaa ratkaista matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit, tutkia neliömuodon definiittisyyden, opiskelija osaa tutkia matriisin säännöllisyysasteen, opiskelija osaa käyttää Cramerin kaavoja, opiskelija osaa määrittää kolmiulotteisen vektoriavaruuden suoran ja tason yhtälöt, opiskelija osaa laskea ristitulon ja skalaaritulon ja tuntee niiden tavallisimmat käyttötavat fysiikan laskuissa, opiskelija tuntee tavallisimmat matriisihajotelmat, opiskelija osaa määrittää lineaarisen selitysmallin kertoimet PNS-menetelmällä, opiskelija osaa selittää lineaariavaruuden, lineaarisen aliavaruuden, lineaarikuvauksen, kannan ja dimension käsitteet.

Sisältö: vektorit, lineaarinen vektoriavaruus, lineaarikuvaus, lineaarinen yhtälöryhmä, matriisi, determinantti, ominaisarvo, Singulaariarvo-hajotelma, sisätulo, normi, approksimointi normin mielessä, vektoritulo, suora, taso, Kalman-suodin, pseudoinverssi, PNS-menetelmä, tietokone-ohjelman käyttö vektori- ja matriisilaskuissa. (käytetty ohjelmointikieli ilmoitetaan kurssin alussa; Octave, Python, Java tai C.)

Oppimateriaali ja Kirjallisuus:

1. luentomoniste:
2. Kreyszig, E: Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Sons, luvut 6, 7, 8.1–8.3
3. S. K. Kivelä: matriisilasku ja lineaarialgebra, luvut 2, 3, 4 ja 7

Toteutustavat: Luennot 44 h, harjoitukset 20 h.

Suoritustavat:

- a) hyväksytty osallistuminen harjoituksiin ja välikokeet (hyväksytyn osallistumisen kriteeri ilmoitetaan ensimmäisellä luennolla ja opintojakson verkkosivuilla) tai
- b) tentti.

Opetus- ja suorituskieli: suomi

Arvostelu: Asteikolla 1-5 tai hylätty, laskuharjoituksista saa lisäpisteitä.

Vastuuhenkilö: Matti Laaksonen

Opettaja: Matti Laaksonen

Vastuuorganisaatio: Matemaattisten tieteiden yksikkö

Lisätietoja: kurssin materiaali www.uva.fi/~mla/math1040/

1.2 Ohjeita kurssin suorittajalle

Kurssi on Vaasan yliopiston teknillisen tiedekunnan opiskelijoille yksi ensimmäisistä kursseista. Kurssimateriaalia läpikäydessäsi kiinnitä huomiota seuraaviin seikkoihin:

Luvuista olioihin: Koulumatematiikkasi on keskittynyt luvuilla laskemiseen. Jonkin verran olet laskenut myös kirjaimilla. Nyt opimme laskemaan vektoreilla ja matriiseilla. On tärkeätä oppia ajattelemaan uusilla olioilla. Aluksi tämä voi tuntua oudolta, mutta nyt on tarkoitus valloittaa tämä uusi abstraktiotaso.

Algoritmit: Kurssin alussa opetellaan ratkaisemaan yhtälöryhmiä. Koulussa on käsitelty yhtälöparit ja kolmen yhtälön ryhmät. Nyt opimme uuden algoritmin (ratkaisumenettelyn). Ensimmäinen reaktiosi saattaa olla, että tämä on turhaa! Algoritmi on mekaaninen ja se soveltuu kaikkiin tapauksiin. On hyödyllistä osata tämä algoritmi. Opintoissasi tulet kohtaamaan monia algoritmeja. Nyt opimme kohtaamaan algoritmeja! Kurssin kuluessa on moni asia ilmaistu algoritmimuodossa, ja ne on tarkoitettu opeteltaviksi.

Käsitteet: Kurssin aikana opitaan useita käsitteitä, jotka ovat paljon käytössä (esimerkiksi lineaarisuus). Käytännön kokemus on osoittanut, että vaikka sanat tunnettaankin, niin usein niiden todellista merkitystä ei tiedetä. Aina, kun ajattelussa käytetään käsitteitä, joiden täsmällistä merkitystä ei tunneta, ollaan vaarallisilla vesillä. Johtopäätökset voivat mennä rankasti pieleen.

Kun materiaalissa on annettu käsitteelle numeroitu määritelmä, niin tätä määritelmää voidaan kysyä tentissä. Tenttitehtävät eivät ole pelkästään laskuja, vaan tehtävistä ainakin yksi on sanallinen ja tyypillisesti siinä kysytään jonkin termin määritelmää.

Todistukset: Kurssimateriaali sisältää melko paljon todistuksia. Todistukset ovat aina sellaisia, että ne on mahdollista ymmärtää aikaisemman avulla. Jos todistus on kohtuuttoman mutkikas, niin toteamme vain, että: "on mahdollista todistaa, että ...".

Jos pystyt seuraamaan todistukseen liittyvän ajatuksenjuoksun, niin käy se läpi huolellisesti ja iloitse. Jos todistus jää sinulta ymmärtämättä, niin älä missään tapauksessa opettele sitä ulkoa. Todistusten opetteleminen ulkoa on hyödytöntä itsensä uuvuttamista.

Kun myöhemmin työelämässä joudut ottamaan selville asioita, joudut perustelemaan asioita itsellesi ja työtovereillesi. Silloin olet vahvemmilla, jos olet tällä kurssilla käynyt todistukset läpi ja tajunnut niiden tyypilliset ajatuskuviot.

Jos haluat varmistaa ylimmän arvosana, niin käy myös todistukset läpi kokeeseen valmistautuessasi. Toisaalta suurin osa koetehtävistä on suorita laskutehtäviä, joten kurssi on mahdollista suorittaa osaamatta todistuksia. Nyt on kysymys siitä, että tunnistat omat lahjasi ja kehität niitä..

Kaavat: Kaavoja ei tarvitse opetella ulkoa. Jos lasket viikkoharjoituksia ahkerasti, niin tärkeimmät kaavat muistat joka tapauksessa. Monisteen lopussa oleva kaavakoelma saa olla tentissä mukana.

Oppimistavoitteet: Kurssin jälkeen opiskelijan tulee osata tietyt asiat. Osattavien asioiden lista on sen verran pitkä, että se on sijoitettu liitteenä monisteen loppuun. Listaa kannattaa seurata kurssin kuluessa.

Tietokoneen käyttö: Tietokoneen käyttö on asetettu tiedekunnan tasolla tärkeäksi oppimisaiheeksi. Jo ensimmäisten kurssien aikana käytämme tietokonetta kurssiin liittyvien esimerkkien ratkaisemiseen. Käytetyt ohjelmat, ympäristöt ja työkalut ovat jatkuvan kokeilu- ja kehittytyön alla. Siksi kannattaa tarkistaa viimeiset ohjeet kurssin verkkosivulta (www.uva.fi/~mla/math1040/) ennen kuin asentaa mitään ohjelmia omalle tietokoneelle.

1.3 Ensimmäiset Octave-ohjelmat

Sec:EnsOhjelma

Nyt teemme ensimmäiset kaksi yksinkertaista ohjelmaa. Tässä kappaleessa ohjelmat toteutetaan Octavella. Liitteessä ^{laCodes} (??) on useimmille monisteen esimerkki-ongelmille esitetty myös Python-, Java-, ja C-kieliset toteutukset.

Code:es01

Ohjelma-esimerkki 1 Tee ohjelma joka tuottaa Fahrenheit/Celsius -muunnostaulukon. Jos t_F on lämpötila Farenheit asteissa ja t_C on vastaava lämpötila Celsius asteissa, niin

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32).$$

(Jotta tuloste ei ole liian pitkä, teemme taulukosta melko karkean. Voit itse muuttaa ohjelmaa siten, että se tekee tarkemman muunnostaulukon.)

Ohjelma tiedostossa: "laEs01.m"

```
# file: "laEs01.m"
printf("Fahrenheit,      Celsius\n");
for n=1:10
    tf = 10*n;
    tc = 5/9*(tf-32);
    printf("t_F = %6.2f,   t_C = %6.2f \n", tf, tc);
endfor
```

Huomautuksia koodiin:

1. Ristikkomerkki # ensimmäisen rivin alussa aloittaa kommentin, jonka tulkki sivuuttaa. Kaikki ristikko-merkin jälkeen rivillä oleva teksti tulkitaan kommentiksi.

Kommentit ovat useimmiten tarkoitettu ohjelmalistausta lukevalle ihmiselle. Tässä tapauksessa kommentti kertoo, minkä nimiseen tiedostoon koodi on talletettu. Joskus kommentteilla ohjataan kääntäjän toimintaa, mutta sellaisia kommentteja on tässä materiaalissa vain muutama.

Huomaa, että ristikkomerkki (risuaita) on eri asia, kuin 'hashtag'. Vasta kun ristikkomerkkiin yhdistetään avainsana, syntyy tunniste, eli 'hashtag'. Esimerkiksi '#linnanjuhlat' on hashtag.

käyttö	Suom.	Engl. (USA)	out of USA	esim.
Yleisnimitys	ristikko	number sign		
Numeron edessä	numero	number		#2
Puhelimessa	ristikko	pound	hash	

Ristikkomerkki # on myös eri asia kuin *sharp* ‡, joka on alunperin nuoteissa esiintyvä ”ylennysmerkki”. Microsoftin ”C sharp”-ohjelmointikielen logo C# (lue: *si: sha:p*) toteutetaan yleensä ristikkomerkkin avulla.

2. Rivillä: `printf("Fahrenheit, Celsiusn");` komento `printf("...");` on funktio, joka tulostaa konsolille argumenttinsa, joka on merkkijono. Merkkijono päättyy tällä kertaa rivinvaihtoon `\n`.
3. `for n=1:10 ... endfor` on toistorakenne, jossa samoja komentoja toistetaan kymmenen kertaa `n:n` arvoilla 1,..., 10.
4. Rivi: `tf = 10*n;` päättyy puolipisteeseen, kuten moni komento Octavessa. Kyseessä on sijoituskomento, joka laskee lausekkeen `10*n` arvon ja sijoittaa sen muuttujan `tf` arvoksi. Jos komennon perässä ei ole puolipistettä, kääntäjä kirjoittaa konsolille muuttujan `tf` nimen ja sen saaman uuden arvon. Jos puolipiste on komennon perässä, niin tulkki ei kirjoita konsolille mitään. Ohjelman voisi siis käytännössä toteuttaa seuraavasti:

```
for n=1:10
    tf = 10*n
    tc = 5/9*(tf-32)
endfor
```

mutta tuloste on hieman sekava. (Kokeile!)

5. Toinen `printf` funktio tulostaa taas rivin tekstiä kuitenkin niin, että ensimmäinen `'%6.2f'` korvataan kuudella merkillä, joihin tulee muuttujan `t_f` arvo kahdella desimaalilla ja toinen `'%6.2f'` korvataan kuudella merkillä, joihin tulee muuttujan `t_c` arvo kahdella desimaalilla. Kirjain `f` kertoo tulkille, että tulostettavan muuttujan arvo on desimaaliluku (engl. `float`).

Ajo:

```
octave:1> laEs01
Fahrenheit,      Celsius
t_F = 10.00,    t_C = -12.22
t_F = 20.00,    t_C = -6.67
t_F = 30.00,    t_C = -1.11
t_F = 40.00,    t_C = 4.44
t_F = 50.00,    t_C = 10.00
t_F = 60.00,    t_C = 15.56
t_F = 70.00,    t_C = 21.11
t_F = 80.00,    t_C = 26.67
t_F = 90.00,    t_C = 32.22
t_F = 100.00,   t_C = 37.78
octave:2>
```

Code:es02

Ohjelma-esimerkki 2 Piirrä funktion $f(x) = x^2 - 2x$ kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 3$. Tee me kuvasta hiukan karkean. Voit parantaa kuvaa.

Ohjelma tiedostossa: "laEs02.m"

```
# file: "laEs02.m"
x = [0 0.5 1 1.5 2 2.5 3]
for k=1:7
    y(k) = x(k)^2-2*x(k);
endfor
plot(x, y, 'b-')
```

Ohjelman ajosta syntyvä graafi on kuvassa [Fig:Code:es02](#) I.

Ohjelman "laEs02.m" viimeisellä rivillä olevan `plot`-komennon kolmas argumentti on merkkijono joka ohjaa piirrettävän käyrän ominaisuuksia. Jos merkkijonosta löytyy alla olevan taulukon I mukaisia merkkejä, niin piirrettävän murtoviivan ominaisuudet muuttuvat vastaavasti. Esimerkiksi piirtokomento `plot(x, y, 'r:o')` tuottaa murtoviivan, joka on piirretty punaisella värillä, viivat ovat katkoviivoja ja pisteet merkitty pienillä palloilla.

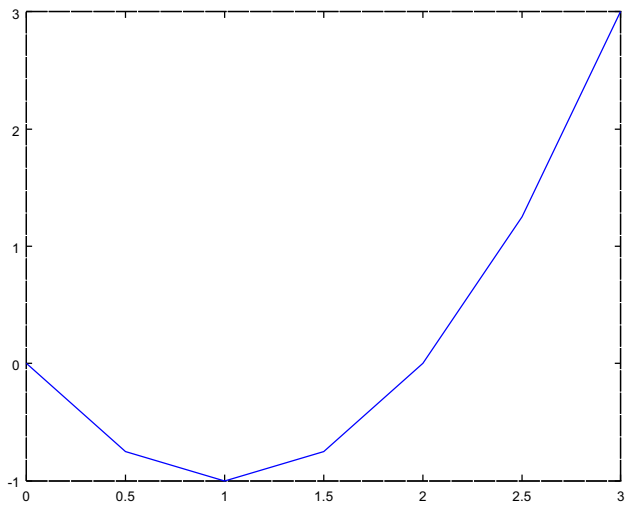


Fig:Code:es02

Kuva 1. Ohjelma-esimerkin 2 tuottama kuva.

ainenOhjelma01

Taulukko 1. Octaven plot-komennon viivan ominaisuudet.

väri		piste		viiva	
w	white	.	point	–	dolid
m	magenta	o	circle	:	dotted
c	cyan	x	x-mark	–.	dashdot
r	red	+	plus	–	dashed
g	green	*	star		
b	blue	s	square		
y	yellow	d	diamond		
k	black	v	triangle down		
		^	triangle up		
		<	triangle left		
		>	triangle right		
		p	pentagram		
		h	hexagram		

2 TRIGONOMETRIA JA FYSIIKAN VEKTOREITA

Ch:TrigFys

2.1 Trigonometriset funktiot

Sec:TrigFunk

2.1.1 Kulmayksiköistä

Aste, 1° (engl. degree) Kun kellon viisari kiertyy yhden kierroksen, sanomme, että se kääntyy 360° (360 astetta). Ajatus täyden kierroksen jakamisesta 360 asteeseen, juontaa kaldealaiseen astrologiaan. Yhdessä vuorokaudessa aurinko siirtyy noin yhden asteen tähtikuvioden joukossa. Oikeastaan täysi kierros tulisi jakaa 365 osaan, mutta sekään ei karkausvuosien takia anna täysin oikeata jakoa. 360 jako-osien määränä on käytännöllinen, koska se on helppo jakaa pienempiin osiin. Yksi aste jaetaan 60 kulminuuttiin ($1^\circ = 60'$) ja yksi kulminuutti jaetaan 60 kulmasekuntiin ($1' = 60''$). Siis aurinko kiertää yhden kulminuutin kulman 24 minuutissa, ja yhden kulmasekunnin kulman 24 sekunnissa.

Gradiaani, grad, eli gooni (engl. grad, ransk grade, saks. gon, ruots. gon) on 1/400 täydestä kierroksesta.

grad, grade [1], gradian, or gon (1^g or gr or grd) is a unit of angle measurement equal to 1/400 circle, 0.01 right angle, 0.9° , or $54'$. This unit was introduced in France, where it is called the grade, in the early years of the metric system. The grad is the English version, apparently introduced by engineers around 1900. The name gon is used for this unit in German, Swedish, and other northern European languages in which the word grad means degree. Although many calculators will display angle measurements in grads as well as degrees or radians, it is difficult to find actual applications of the grad today. ¹

Radiaani, rad, on kulman ympyrästä erottaman kaaren pituuden suhde ympyrän säteeseen (kun ympyrän keskipiste on kulman kärjessä). Täysi kierros on silloin 2π radiaania. Suorakulma on $\frac{\pi}{2}$ rad.

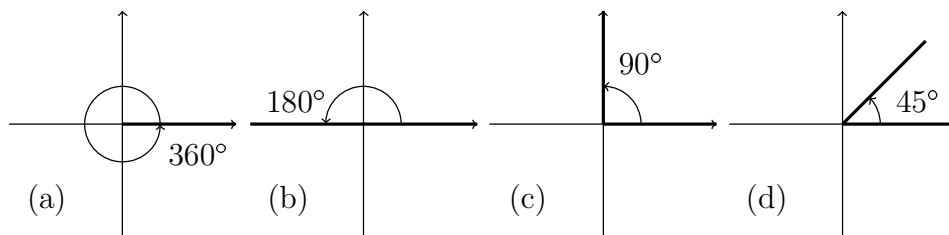
¹ <http://www.unc.edu/~rowlett/units/dictG.html>

Piiru, Kompassipiiru on $1/32$ täydestä kierroksesta. Siis $1 \text{ piiru} = 11,25^\circ$. Kompassipiiru näkyy edelleen merenkulun säädöksissä.

Tykistön piiru on karkeasti se kulma, jossa metrin kokoinen esine näkyy kilometrin päästä katsottuna. Siis täysi kierros on noin $1000 \cdot 2\pi$ piirua $\approx 6283,2$ piirua. Eri armeijat jakavat täyden kierroksen piiruiksi hiukan eri tavoin. Täysi kierros on 6000 piirua (venäjä), 6300 piirua (Ruotsi) tai 6400 piirua (Nato). Suomessa ollaan siirtymässä venäläisestä piirusta nato-piiruun.

$$360^\circ = 400 \text{ grad} = 2\pi \text{ rad} = 6400 \text{ piirua}$$

Kun tiedämme, mitä täysi kierros on valitussa kulma-asteikossa, niin *oikokulma* on $1/2$ täydestä kierroksesta ($180^\circ = 200 \text{ grad} = \pi \text{ rad} = 3200 \text{ piirua}$), ja *suorakulma* on $1/4$ täydestä kierroksesta ($90^\circ = 100 \text{ grad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 1600 \text{ piirua}$).

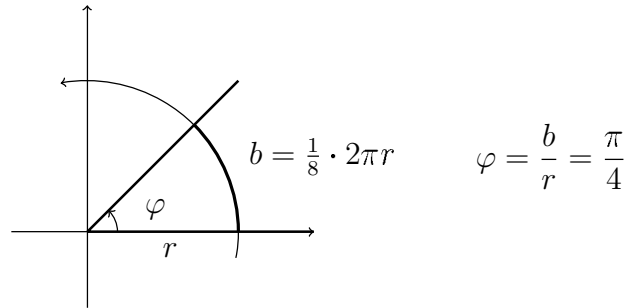


Kuva 2. (a) täysi kierros 2π , (b) oikokulma π , (c) suora kulma $\pi/2$, (d) suoran kulman puolikas $\pi/4$.

Kulma α on *terävä*, jos $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ ($0 \leq \alpha < \pi/2$). Kulma α on *tylppä*, jos $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ($\pi/2 < \alpha < \pi$).

Radiaani-kulmayksikkö ”rad” kirjoitetaan näkyviin, jos halutaan lukijan varmasti tietävän missä yksiköissä kulma on ilmaistu. Jos käytetty yksikkö on asiayhteydestä selvä, niin silloin ”rad” jätetään pois. Tämä ei ole virhe, sillä kulma radiaaneissa on kaaren pituus jaettuna säteen pituudella, ja tämä laskutoimitus antaa tulokseksi paljaan luvun.

Tällä kurssilla käytetään kulmayksikkönä joko astetta tai radiaania. (Piiru voi jossakin erikoistilanteessa esiintyä, mutta gradia emme käytä koskaan. Opettele omassa laskimessasi tarkistamaan laskimen kulmayksikkö-asetus ja tarvittaessa muuttamaan se. Kokeessa ei nyt väärän vastauksen selitykseksi kelpaa, että ”Tein kyllä kaiken oikein, mutta laskimessa olikin grad-asetus päällä.”)

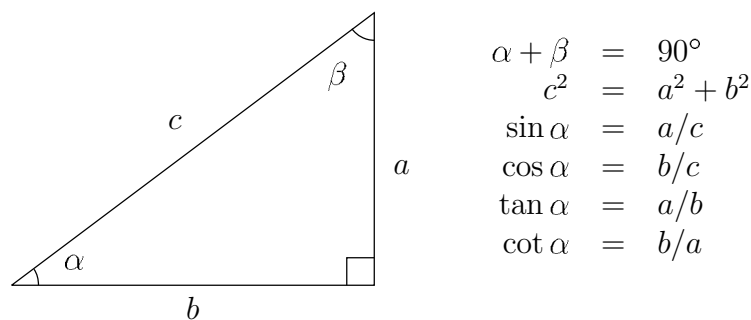


Kuva 3. Täyden kierroksen kahdeksas osa radiaaneina.

2.1.2 Suorakulmainen kolmio

Suorakulmainen kolmio on koulusta tuttu kolmio, jonka yksi kulma on suora (90° , tai $\pi/2$ rad). Käytämme seuraavassa melko laajasti vakiintuneita merkintäperiaatteita:

- Kolmion kulmia merkitsemme kreikkalaisin kirjaimin α , β , γ , jne. Suoraa kulmaa ei aina merkitä kirjaimella, vaan se merkitään kuvaan pienellä neliöllä.
- Kolmion sivuja ja sivujen pituuksia merkitsemme tavallisin kirjaimin a , b , c , jne.
- Ensimmäisessä kuvassa kulmaa α vastassa on sivu a , kulmaa β vastassa on sivu b jne. Kun ensimmäistä kuvaa analysoidaan jakamalla kolmioita pienempiin osiin, joudutaan tästä periaatteesta yleensä luopumaan.
- Suoran kulman kyljet ovat kateetit a ja b , ja suoraa kulmaa vastassa on hypoteenuusa c .



Kuva 4. Suorakulmainen kolmio.

Fig:laSKkolmio

Suorakulmaisen kolmion terävälle kulmalle määritellään seuraavat trigonometriset funktiot (ks kuva 4):

Fig:laSKkolmio

Sini = vastainen kateetti jaettuna hypotenuusalla $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

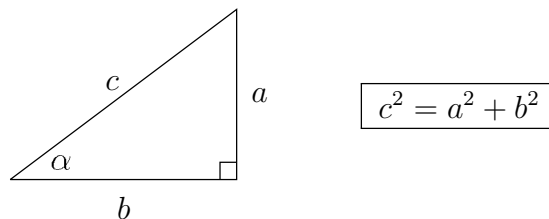
Kosini = viereinen kateetti jaettuna hypotenuusalla $\cos \alpha = \frac{b}{c}$

Tangentti = vastainen kateetti jaettuna viereisellä kateetilla $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

Kotangentti = viereinen kateetti jaettuna vastaisella kateetilla $\cot \alpha = \frac{b}{a}$

Funktioiden arvot eivät riipu kolmion suuruudesta. Pienessä ja suuressa suhteet ovat samat.

Lause 1 (Pythagoran lause) Suorakulmaisessa kolmiossa hypotenuusan pituuden neliö on kateettien pituuksien neliöiden summa.



Seuraavassa lauseessa ja tästä eteenpäin muutenkin merkinnällä $\sin^2 \alpha$ tarkoitetaan lauseketta $(\sin \alpha)^2$. Merkitätapa on aiemmin ollut välttämätön, kun on käsitelty pitkiä trigonometrisia sarjakehitelmiä. Muussa yhteydessä merkintä tuntuu aluksi epäloogiselta, mutta siihen tottuu nopeasti, ja sitä on syytä osata käyttää.

Lause 2 (Seuraus Pythagoran lauseesta) Jos α on terävä kulma, niin

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Perustelu: Tarkastellaan mitä tahansa suorakulmaista kolmiota, jossa kulma α on terävänä kulmana. Nimetään kolmion sivut ja muut kulmat tavalliseen tapaan. Silloin $a = c \cdot \sin \alpha$ ja $b = c \cdot \cos \alpha$ ja Pythagoran lauseen mukaan

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ \Leftrightarrow (c \cdot \sin \alpha)^2 + (c \cdot \cos \alpha)^2 &= c^2 \\ \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1. \quad \square \end{aligned}$$

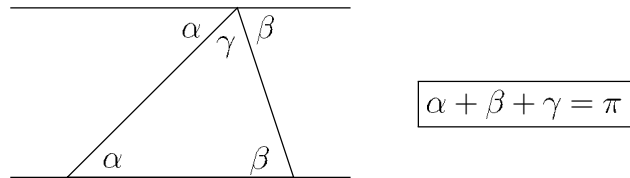
2.1.3 Kolmiolauseet

Tässä kappaleessa kolmion ei tarvitse olla suorakulmainen, ellei erikseen niin sanota. Koska kolmiossa voi olla tylppä kulma, sovimme tylpän kulman sinille ja kosinille seuraavat sopimukset:

$$\text{jos } \pi/2 \leq \alpha \leq \pi, \text{ niin } \sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha), \quad (2.1) \quad \boxed{\text{EqSinTylp}}$$

$$\text{jos } \pi/2 \leq \alpha \leq \pi, \text{ niin } \cos(\alpha) = -\cos(\pi - \alpha). \quad (2.2) \quad \boxed{\text{EqCosTylp}}$$

Lause 3 Kolmion kulmien summa on π (eli 180°).

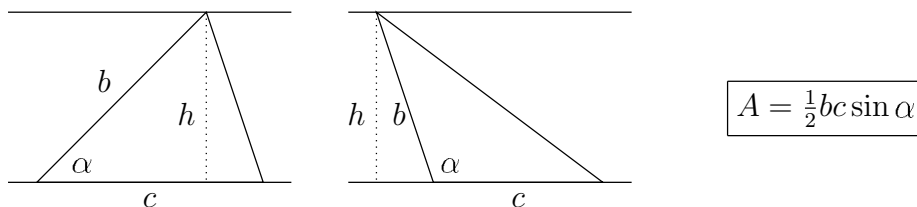


Perustelu: Kuvan mukaisesti kolmion huipun kautta piirretään kannan suuntainen suora. Kun nyt kolmion vasen kylki leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa, ovat syntyvät ristikulmat yhtäsuuret. Kolmion kantakulmaa α vastaava ristikulma on myös suuruudeltaan α . Vastaavasti kantakulmaa β vastaava ristikulma on myös suuruudeltaan β . Huipun kohdalle syntyvä kolmen kulman summa on oikokulma.

Lause 4 (Seuraus edellisestä) Jos kolmiossa on tylppä kulma ($> \pi/2$), niin muut kaksi kulmaa ovat teräviä ($< \pi/2$).

Lause 5 Kolmion ala on puolet kahden sivun pituuksien ja niiden välisen kulman sinin tulosta. (Kaavana: $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$.)

Th:kolmionala



Perustelu: Kuvan mukaisesti kolmion huipun kautta piirretään kannan suuntainen suora. Piirretyn suoran ja kannan välinen etäisyys on kolmion korkeus h . Olkoon α kannan

c ja kyljen b välinen kulma. Silloin kolmion korkeus on $h = b \sin(\alpha)$. Kolmion pinta-ala on puolet kannan ja korkeuden tulosta, eli

$$A = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}bc \sin \alpha.$$

□

Lause 6 Sinilause:

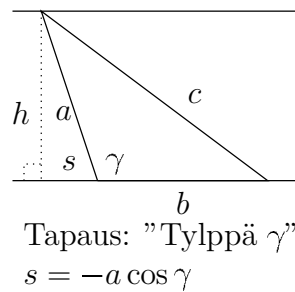
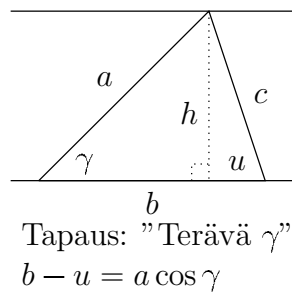
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Perustelu: Lauseen ^{Th:kolmionala}5 mukaan kolmion kaksinkertainen pinta-ala voidaan laskea seuraavilla tavoilla: $bc \sin \alpha = ac \sin \beta = ab \sin \gamma$. Väite seuraa, kun lausekkeet jaetaan abc :lla ja siirrytään käänteislausekkeisiin. □

Lause 7 Kosinilause:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Perustelu:



Yllä olevien kuvien merkinnöin:

Jos γ on terävä, niin

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + u^2 \\ &= a^2 - (b - u)^2 + u^2 \\ &= a^2 - b^2 + 2bu \\ &= a^2 + b^2 - 2b(b - u) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

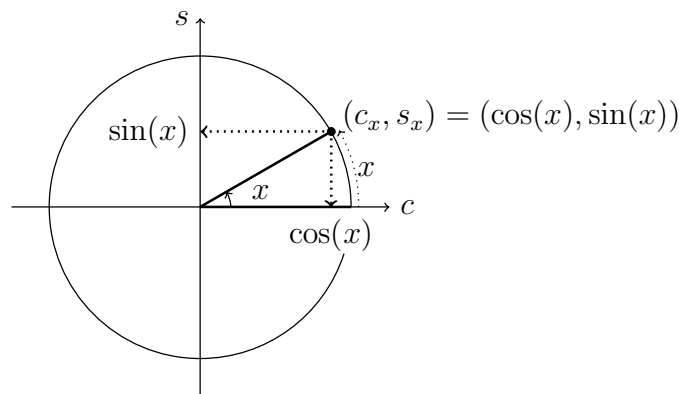
Jos γ on tylppä, niin

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b + s)^2 \\ &= a^2 - s^2 + (b + s)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2bs \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

□

2.1.4 Trigonometriset funktiot

Edellä kulma α oli suorakulmaisen kolmion terävä kulma, joten tähän mennessä $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ ja $\cot \alpha$ on määritelty vain, kun $0 \leq \alpha < \pi/2$. Seuraavaksi määrittelemme, mitä $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ ja $\cot(x)$ ovat, kun x on mikä tahansa reaaliluku ($x \in \mathbb{R}$). Tämän kappaleen merkinnät (x ja sulut sen ympärillä) korostavat trigonometristen funktioiden funktio-luonnetta. Myöhemmin x korvautuu taas muilla kirjaimilla ja sulut jäävät pois.



Kuva 5. Kulman x kehäpisteen koordinaatit.

Piirretään (c, s) -koordinaatisto ja sen päälle origokeskinen yksikköympyrä. c -akseli osoittaa vaakasuoraan oikealle ja s -akseli osoittaa ylöspäin. (Käytämme nyt c - ja s -akseleita, koska muuttuja x on varattu kulmalle.) Piirretään koordinaatistoon yksikköympyrä $c^2 + s^2 = 1$ ja piirretään koordinaatistoon 0-kulma niin, että kulman kärki on origossa ja kulman kumpikin kylki on positiivisella c -akselilla. Avataan kulmaa kääntämällä vasenta kylkeä niin, että vasemman kyljen ja ympyrän kehän leikkauspiste, eli kehäpiste, liikkuu kehää pitkin positiiviseen suuntaan matkan x . Silloin kulman suuruus on x radiaania.

Kulman vasen kylki leikkaa yksikköympyrän kehän kehä-pisteessä (c_x, s_x) . Kehäpisteen s -koordinaattia sanomme kulman x siniksi, ja käytämme sille merkintää

$$\sin x,$$

ja kehäpisteen c -koordinaattia sanomme kulman x kosiniksi, ja käytämme sille merkintää

$$\cos x.$$

Sinin arvo, eli kehäpisteen s -koordinaatti, ja kosinin arvo, eli kehäpisteen c -koordinaatti, riippuvat kulman suuruudesta x . Näin saamme funktiot

$$x \mapsto \sin(x), \quad \text{ja} \quad x \mapsto \cos(x).$$

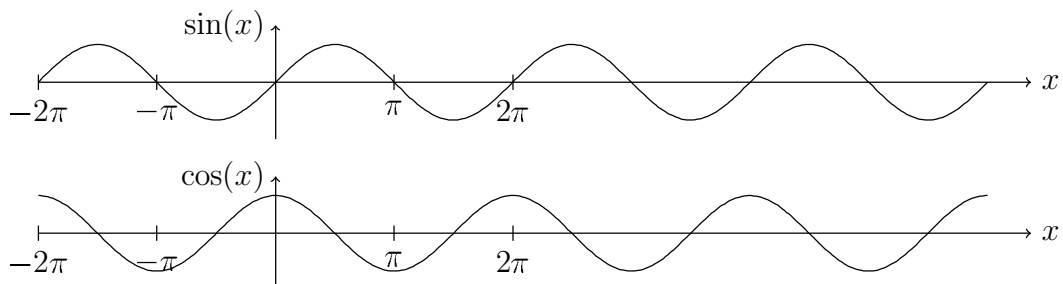
Funktioiden $\sin(x)$ ja $\cos(x)$ arvot on nyt määritelty kahdella erilaisella tavalla: (1) käyttäen suorakulmaista kolmiota ja (2) käyttäen yksikköympyrää. Kun kulma x on terävä, eli $0 \leq x \leq \pi/2$, niin kumpikin määritelmä antaa saman arvon sinille, ja kumpikin määritelmä antaa saman arvon kosinille.

Yksikköympyrän avulla sinille ja kosinille saadaan arvot myös silloin, kun x on suurempi kuin suora kulma. Silloin kehäpiste kulkee kehällä enemmän kuin neljänneksen kierroksen. Kulma x voi olla miten suuri tahansa. Tarvittaessa kehäpiste kiertää kehän vaikka useampaan kertaan kulkiessaan matkan x . Kulma x voi myös olla negatiivinen. Silloin kehäpiste lähtee liikkeelle päinvastaiseen suuntaan, myötapäivään.

Nyt voimme sanoa, että sini- ja kosinifunktiot on määritelty kaikilla x :n reaaliarvoilla. Kuvassa [laFig:SinCos](#) on funktioiden kuvaajat. Samoin voimme määritellä tangentti- ja kotangenttifunktioiden arvot

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \sin(x)/\cos(x), \quad \text{kun } x \neq \pi/2 + n \cdot \pi, \text{ ja} \\ \cot(x) &= \cos(x)/\sin(x), \quad \text{kun } x \neq n \cdot \pi.\end{aligned}$$

Tangentin ja kotangentin arvoja emme siis määrittele kaikilla x :n reaaliarvoilla. Kuvassa [laFig:TanCot](#) on näiden funktioiden kuvaajat.



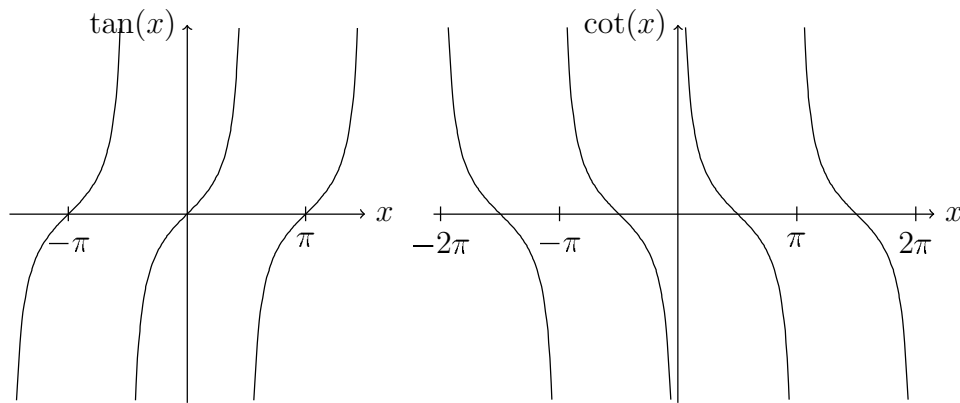
laFig:SinCos

Kuva 6. Sini- ja kosini-funktioiden kuvaajat.

Kun kulmaa kasvatetaan arvosta x arvoon $x + 2\pi$, kulmaa vastaava kehäpiste kiertää yhden täyden kierroksen ja lopussa kehäpiste on samassa paikassa, josta se lähti. Siis

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \text{ja} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x). \quad (2.3)$$

Sanomme, että sini- ja kosinifunktio ovat jaksollisia, perusjaksona 2π . Myös perusjakson kokonaislukumonikerrat ovat jaksoja ($\sin(x + n \cdot 2\pi) = \sin(x)$). Tangentti ja kotangentti ovat jaksollisia perusjaksona π .



Kuva 7. tangentti- ja kotangentti-funktioiden kuvaajat.

Yksikköympyrän avulla on helppo nähdä, että myös seuraavat kaavat ovat tosia kaikilla x :n arvoilla:

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1, \quad \text{ja} \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1, \quad (2.4) \quad \text{TrigEq02}$$

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \text{ja} \quad \cos(-x) = \cos(x), \quad (2.5) \quad \text{TrigEq03}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x), \quad \text{ja} \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x). \quad (2.6) \quad \text{TrigEq04}$$

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos(x), \quad \text{ja} \quad \cos(\pi/2 - x) = \sin(x). \quad (2.7) \quad \text{TrigEq05}$$

Kaavan (2.5) kohdalla sanomme usein, että sinifunktio on pariton,² ja kosinifunktio on parillinen.³ Kaava (2.6) merkitsee samaa, kuin aiemmin tekemämme sopimukset (2.1) ja (2.2). Sopimukset olivat siis viisaasti valitut (ainoat järkevät). Usein tarvitsemme summakulman sinin ja kosinin kaavoja:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y) \quad (2.8)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \quad (2.9)$$

Trigonometrisille funktioille voidaan keksiä paljon kaavoja, joita emme nyt ryhdy luettelemaan. Kaavat löytyvät kaava-liitteestä ?? sivu ??.

2.1.5 Arcus-funktiot

Sini- ja kosinifunktiot ovat jatkuvia, mutta eivät monotonisia. Siksi niillä ei ole käänteisfunktioita (yleisessä merkityksessä). Kun sinifunktion määrittelyjoukko rajoitetaan

²Parittomalle funktiolle on voimassa $f(-x) = -f(x)$. Tämä on tyypillistä parittomalle potenssifunktiolle, kuten $f(x) = x^3$.

³Parilliselle funktiolle on voimassa $f(-x) = f(x)$. Tämä on tyypillistä parilliselle potenssifunktiolle, kuten $f(x) = x^2$.

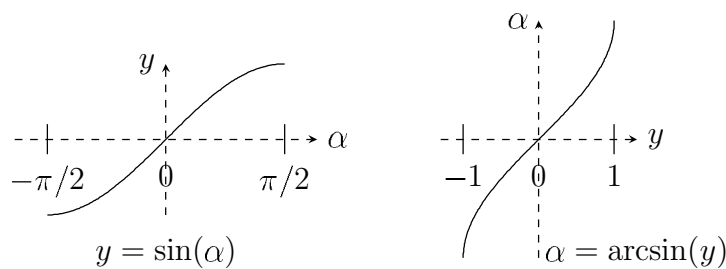
väliksi $I_n = [-\pi/2 + n \cdot \pi, \pi/2 + n \cdot \pi]$, niin sinin käänteisfunktio löytyy. Kun kosinifunktion määrittelyjoukko rajoitetaan väliksi $J_n = [0 + n \cdot \pi, \pi + n \cdot \pi]$, niin kosinin käänteisfunktio löytyy.

Tangenttifunktio on epäjatkuva kohdissa $x = \pi/2 + n \cdot \pi$, mutta se on monotoninen (kasvava) väleillä I_n . Kotangenttifunktio on epäjatkuva kohdissa $x = n \cdot \pi$, mutta se on monotoninen (vähenevä) väleillä J_n .

Määritelmä 8 Tässä luentosarjassa määrittelemme funktiot $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$ ja arccot väleille $I_0 = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ja $J_0 = [0, \pi]$ rajoitettujen trigonometrinen funktioiden käänteisfunktioina seuraavasti:

funktio	käänteisfunktio
$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$	$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$	$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
$\tan : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$	$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cot : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$	$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi]$

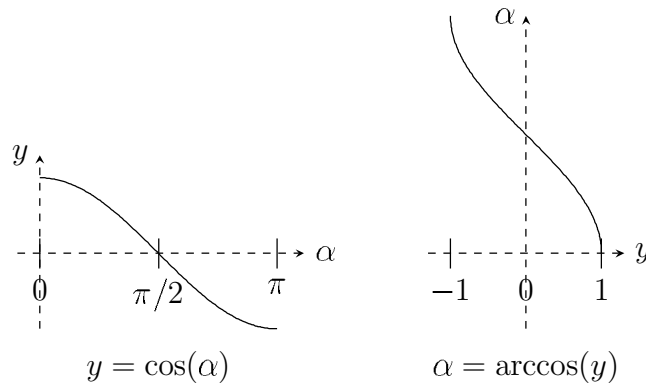
Usein kirjoissa käytetään arcus-funktioiden paikalla käänteisfunktio-merkintää ($\arcsin \sim \sin^{-1}$). Tämä on oikein ja perusteltua, jos kirjassa on trigonometriset funktiot määritetty kompleksimuuttujan kompleksiarvoisina funktioina. Silloin funktioteorian ja Riemannin pintojen avulla käänteisfunktio voidaan määritellä hyvin. Tässä kurssissa ei käsitellä Riemannin pintoja joten sovimme, että tässä materiaalissa $\arcsin$ ja $\arctan$ saavat arvon väliltä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ja $\arccos$ ja arccot saavat arvon väliltä $[0, \pi]$.



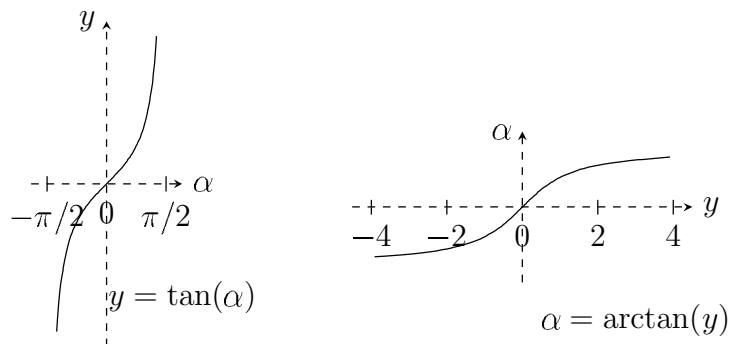
Kuva 8. Sini- ja arcus-sini -funktioiden kuvaajat.

aFig:SinArcsin

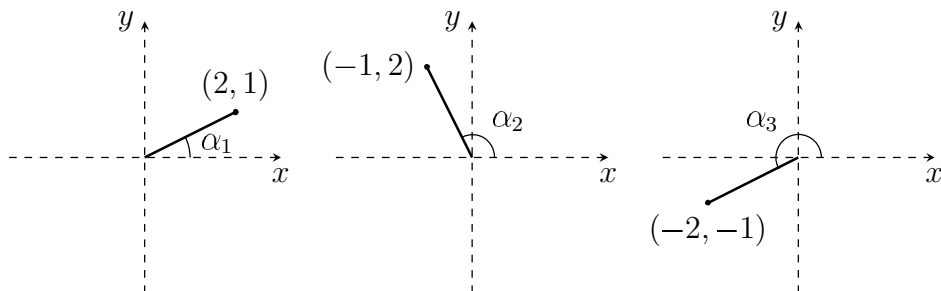
Esimerkki 9 Laske pisteiden $P_1 = (2, 1)$, $P_2 = (-1, 2)$, $P_3 = (-2, -1)$ paikkavektoreiden ja x -akselin väliset kulmat.



Kuva 9. Kosini- ja arcus-kosini -funktioiden kuvaajat.



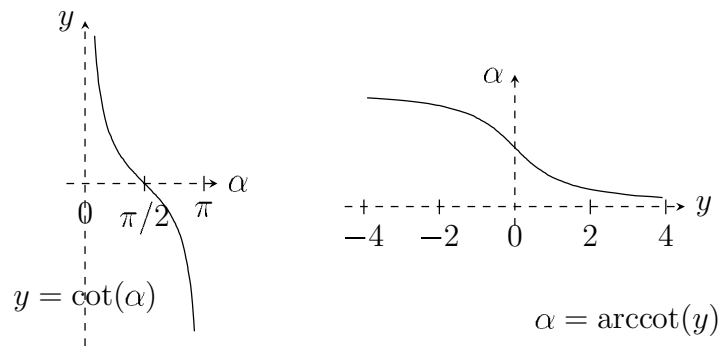
Kuva 10. Tangentti- ja arcus-tangentti -funktioiden kuvaajat.



Periaatteessa tehtävä on helppo, sillä

$$\tan \alpha_k = \frac{y_k}{x_k} \quad \Rightarrow \quad \alpha_k = \arctan\left(\frac{y_k}{x_k}\right) + n \cdot \pi.$$

Nyt tulee laskijan kuitenkin muistaa, että laskin antaa $\arctan$ -funktion arvon aina väliltä $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$, joten laskijan tulee lisätä laskimen antamaan kulmaan π laskiessaan kulmia α_2 ja α_3 mutta ei tule lisätä laskimen antamaan arvoon mitään laskiessaan



Kuva 11. Kotangenti- ja arcus-kotangenti -funktioiden kuvaajat.

KotanArckotan

kulmaa α_1 . Siis

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 0.46365(\text{rad}) = 26.565^\circ \\ \alpha_2 &= \arctan\left(\frac{2}{-1}\right) + \pi = 2.03444(\text{rad}) = 116.565^\circ \\ \alpha_1 &= \arctan\left(\frac{-1}{-2}\right) + \pi = 3.60524(\text{rad}) = 206.565^\circ\end{aligned}$$

Johtopäätös esimerkin perusteella

$$\alpha = \begin{cases} \arctan(y/x), & \text{kun } x \geq 0, \\ \arctan(y/x) + \pi, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

2.2 Pisteet ja vektorit suorakulmaisissa koordinaatistoissa

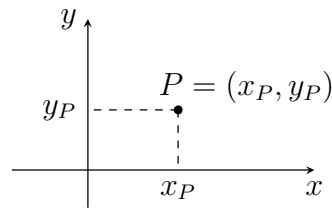
Sec:SKKoordSys

Opiskelija on jo koulussa käsitellyt tason ja avaruuden koordinaatistoja, mutta koulussa asia yleensä yksinkertaistetaan äärimmilleen niin, että syntyy mielikuva siitä, että on olemassa vain yksi koordinaatisto.

Tavallinen tason (x, y) -koordinaatisto

Koordinaatisto asetetaan siten, että x -akseli on vaakasuora, asteikko kasvaa oikealle, ja y -akseli on pystysuora, asteikko kasvaa ylöspäin. Akselit ovat siis kohtisuorassa. Akselit leikkaavat asteikkojen nollakohdissa. akselien leikkauspistettä sanomme origoksi.

Jos tason pisteen P kautta piirretty pystysuora leikka x -akselin kohdassa x_P , ja pisteen P kautta piirretty vaakasuora leikka y -akselin korkeudella y_P niin sanomme, että piste on kohdassa x_P korkeudella y_P ja merkitsemme $P = (x_P, y_P)$. Janaa, joka yhdistää



Kuva 12. Pisteen koordinaatit tasossa.

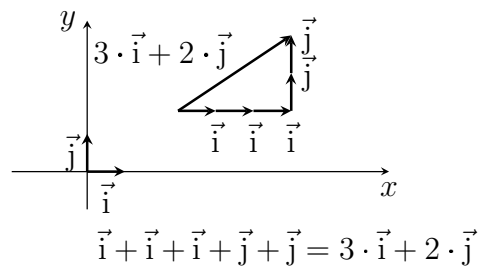
pisteet P ja Q merkitsemme kirjainparilla, jonka päällä on viiva, $\overline{PQ}$. Kun janalle annetaan suunta (P :stä Q :hun), saamme suuntajanan $\overrightarrow{PQ}$. Tarkasti tulkittuna suuntajalla on pituus, suunta ja paikka.

Vektorilla on pituus ja suunta. Kun piirrämme vektorin, niin piirrämme suuntajanan, jolla on sama pituus ja suunta kuin vektorilla. Sanomme, että mikä tahansa suuntajana, jolla on sama pituus ja suunta kuin vektorilla, edustaa vektoria. On tapana sopia nimet koordinaattiakselien suuntaisille yksikkövektoreille:

vektori	pituus	suunta
$\vec{i}$	1	x -akselin suunta
$\vec{j}$	1	y -akselin suunta

Suuntajanan pituus ja suunta on helppo esittää yksikkövektoreiden $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ avulla:

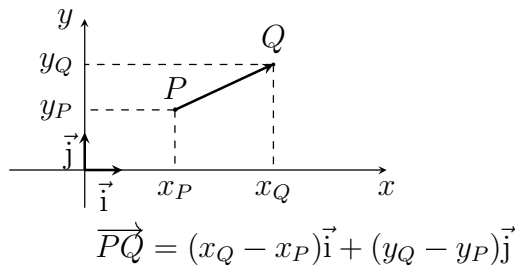
$$\text{”}a \text{ oikealle ja } b \text{ ylös”} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$$



Kuva 13. ”Kolme oikealle ja kaksi ylös”.

Kun tiedämme suuntajanan päätepisteiden koordinaatit, niin suuntajanan pituus ja suunta saadaan samalla tavalla

$$\overrightarrow{PQ} = (x_Q - x_P) \cdot \vec{i} + (y_Q - y_P) \cdot \vec{j}$$

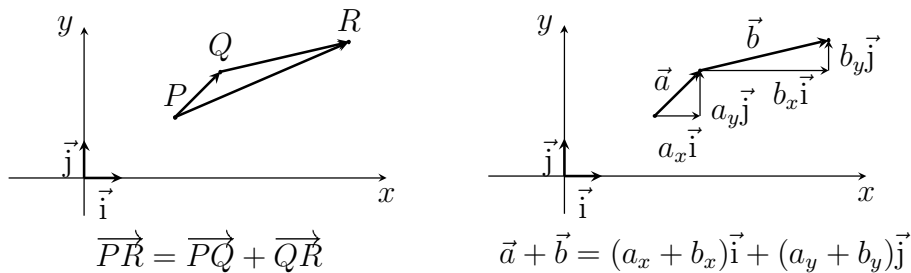


Kuva 14. Suuntajanan pituus ja suunta.

Pisteen $P = (x_P, y_P)$ paikkavektoria $\vec{r}_P$ edustaa suuntajana origosta O pisteeseen P , eli

$$\vec{r}_P = \vec{OP} = x_P\vec{i} + y_P\vec{j}.$$

Kahden vektorin, $\vec{a}$ ja $\vec{b}$, summa $\vec{a} + \vec{b}$ konstruoidaan piirtäen siten, että ensin piirretään jokin vektoria $\vec{a}$ edustava suuntajana $\vec{PQ}$, sitten piirretään pisteestä Q alkava vektorin $\vec{b}$ edustaja $\vec{QR}$. Nyt suuntajana $\vec{PR}$ edustaa summavektoria $\vec{a} + \vec{b}$.



Lause 10 Tason vektorin $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ pituus $|\vec{a}|$ voidaan laskea lausekkeesta

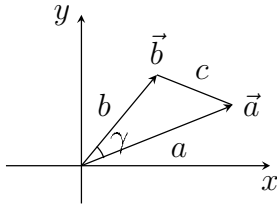
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Perustelu: Kun piirrämme vektorille $\vec{a}$ origosta alkavan edustajan, syntyy luonnollisella tavalla suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusan pituus on sama kuin vektorin pituus ja kateettien pituudet ovat $|a_x|$ ja $|a_y|$. Väite seuraa nyt Pythagoran lauseesta. $\square$

Lause 11 Kaksi tasovektoria $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ ja $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ ja niiden välinen kulma γ toteuttavat yhtälön

$$\cos \gamma = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Perustelu: Piirretään vektoreille origosta alkavat edustajat. Olkoon edustajien loppupisteitä yhdistävän janan pituus c . Kosinilauseen mukaan:



$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \\ (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 &= a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - 2ab \cos \gamma \\ -2a_x b_x - 2a_y b_y &= -2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \gamma \end{aligned}$$

□

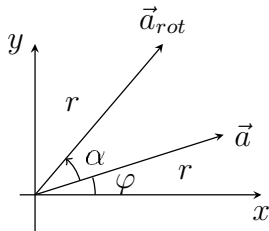
Lause 12 (a) Jos tasovektoria $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ kierretään origon ympäri positiiviseen kiertosuuntaan kulman α verran, niin kierretty vektori on

$$\vec{a}_{rot} = (\cos(\alpha) \cdot a_x - \sin(\alpha) \cdot a_y) \vec{i} + (\sin(\alpha) \cdot a_x + \cos(\alpha) \cdot a_y) \vec{j}.$$

(b) Jos tasovektoria $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ kierretään origon ympäri positiiviseen kiertosuuntaan kulman $\pi/2$ verran, niin kierretty vektori on

$$\vec{a}_{rot} = -a_y \vec{i} + a_x \vec{j}.$$

Perustelu: (a) Olkoon vektorin $\vec{a}$ pituus r ja vektorin ja x -akselin välinen kulma φ , jolloin $a_x = r \cos \varphi$ ja $a_y = r \sin \varphi$. Nyt kierretty vektori on



$$\begin{aligned} \vec{a}_{rot} &= r \cos(\alpha + \varphi) \vec{i} + r \sin(\alpha + \varphi) \vec{j} \\ &= r(\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi) \vec{i} \\ &\quad + r(\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi) \vec{j} \\ &= (\cos \alpha \cdot a_x - \sin \alpha \cdot a_y) \vec{i} + (\sin \alpha \cdot a_x + \cos \alpha \cdot a_y) \vec{j} \end{aligned}$$

(b) Seuraa suoraan a-kohdasta, kun $\alpha = \pi/2$.

□

Konkreettisen tason (x, y) -koordinaatisto

Jatkossa monen esimerkin ratkaisu alkaa sillä, että asetetaan koordinaatisto, jossa laskut ja analyysit tehdään. Koordinaatisto siis valitaan tehtävään sopivalla tavalla. Edellisessä kappaleessa koordinaattiakselien suunnat olivat ”oikealle” ja ”ylös”. Tällä valinnalla saatiin aikaan se, että kun ensimmäisen koordinaattiakselin suuntaista vektoria käännetään positiiviseen kiertosuuntaan (vastapäivään) kulman $\pi/2$ verran, niin käännetty vektori on toisen koordinaattiakselin suuntainen.

Kun varustamme tason suorakulmaisella koordinaatistolla, valitsemme neljä ominaisuutta

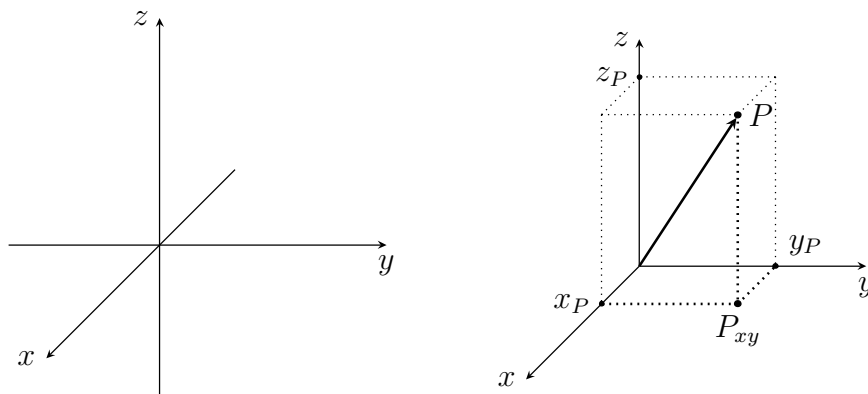
1. Origo. Piste, jossa koordinaattiakselit leikkaavat.
2. x -akseli.
3. y -akseli, joka on kohtisuorassa x -akselia vastaan ja saadaan x -akselista kiertämällä kulman $\pi/2$ verran positiiviseen kiertosuuntaan.
4. Akselien asteikko. Akseleilla tulee olla samat asteikot. Asteikkojen nollakohdat ovat origossa.

Edellä kohta 3 sisältää aidon valinnan, sillä suunnistus riippuu siitä, miltä puolelta katsomme tasoa. Jos avaruusaseman kaksi astronauttia ovat korjaamassa aurinkopaneelia, ja ovat eri puolilla paneelia, niin he ovat perustellusti eri mieltä suunnistuksesta. Suunnistus riippuu siitä, miten valitsemme tason ylä- ja ala-puolen.

Lisää esi-
merkki

Tavallinen avaruuden (x, y, z) -koordinaatisto

Aloitetaan koordinaatiston konstruointi siten, että katsoja on kyykyssä ja origo on katsojan edessä. x -akseli on vaakasuora katsojaan päin, y -akseli on vaakasuora oikealle (kohtisuorassa x -akselia vastaan), ja z -akseli osoittaa ylöspäin (kohtisuorassa sekä x -akselia että y -akselia vastaan). Tämän jälkeen katsoja nousee seisomaan ja ottaa askeleen oikealle, ja piirtää kuvan näkemästään. Se, että katsoja muutti hieman asentoaan, saa x -akselinkin näkymään kuvassa hyvin.



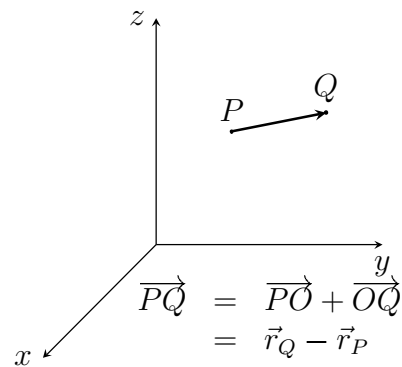
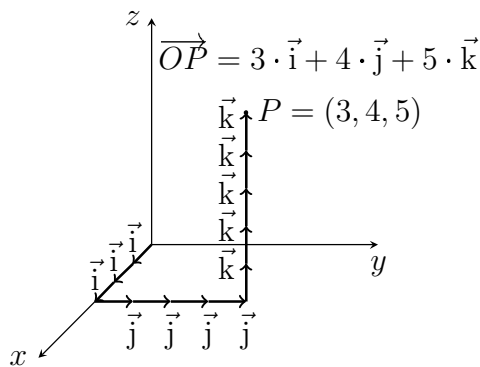
Kuva 15. (x, y, z) -koordinaatisto.

Samoin kuin edellä määritellään koordinaattiakselien suuntaiset yksikkövektorit

vektori	pituus	suunta
$\vec{i}$	1	x -akselin suunta
$\vec{j}$	1	y -akselin suunta
$\vec{k}$	1	z -akselin suunta

Olkoon P avaruuden mikä tahansa piste. Piirretään pisteen P kautta pystysuora (vektorin $\vec{k}$ suuntainen suora), joka leikkaa (x, y) -tason pisteessä $P_{xy} = (x_P, y_P, 0)$. Piste P_{xy} on pisteen P kohtisuora projektio (x, y) -tasoon. z -koordinaatti kertoo, miten korkealla P on (x, y) -tasosta. z_P on plus-merkkinen, jos P on (x, y) -tason yläpuolella, ja miinus-merkkinen, jos P on (x, y) -tason alapuolella. Nyt on selvää, että

$$\begin{aligned}\vec{OP} - z_P \vec{k} &= \vec{OP}_{xy} \\ \Leftrightarrow \vec{OP} - z_P \vec{k} &= x_P \vec{i} + y_P \vec{j} \\ \Leftrightarrow \vec{OP} &= x_P \vec{i} + y_P \vec{j} + z_P \vec{k}\end{aligned}$$



Kun piirrämme pisteestä P vaakasuoran janan z -akselille, niin janan akselin puoleinen päätepiste $P_z = (0, 0, z_P)$ on pisteen P projektio z -akselille.

Edellä sanoimme (x, y) -tasoa vaakasuoraksi ja z -akselia pystysuoraksi. Tämä helpottaa kuvion näkemistä, mutta ei ole mitenkään välttämätöntä. Akselit ovat täysin tasavertaiset. Samalla tavalla kuin edellä piste projisoitiin (x, y) -tasoon ja z -akselille, piste voidaan myös projisoida (y, z) -tasoon ja x -akselille, tai (z, x) -tasoon ja y -akselille.

Edellä konstruoitu koordinaatisto on esimerkki positiivisesti suunnistetusta koordinaatistosta. Suunnistuksen positiivisuuden voi testata ns. ”oikean käden säännöllä”:

Aseta oikean käden peukalo, etusormi ja keskisormi likimain kohtisuoraan toisiinsa nähden. Jos nyt pystyt kääntämään kätesi niin, että peukalo on x -akselin suuntainen, etusormi on y -akselin suuntainen, ja keskisormi on z -akselin suuntainen, niin koordinaatisto on positiivisesti suunnistettu.

Jos koordinaatisto on positiivisesti suunnistettu, niin kahden koordinaattiakselin määrittämän tason suunnistus saadaan myös oikean käden avulla:

Olkoon (x, y, z) -koordinaatisto positiivisesti suunnistettu. Jos asetat oikean käden sormet ”peukutus-asentoon” ja asetat peukalon z -akselin suuntaiseksi, niin muut sormet näyttävät (x, y) -tason positiivisen kiertosuunnan. Jos asetat peukalon x -akselin suuntaiseksi, niin muut sormet näyttävät (y, z) -tason positiivisen kiertosuunnan. Jos asetat peukalon y -akselin suuntaiseksi, niin muut sormet näyttävät (z, x) -tason positiivisen kiertosuunnan.

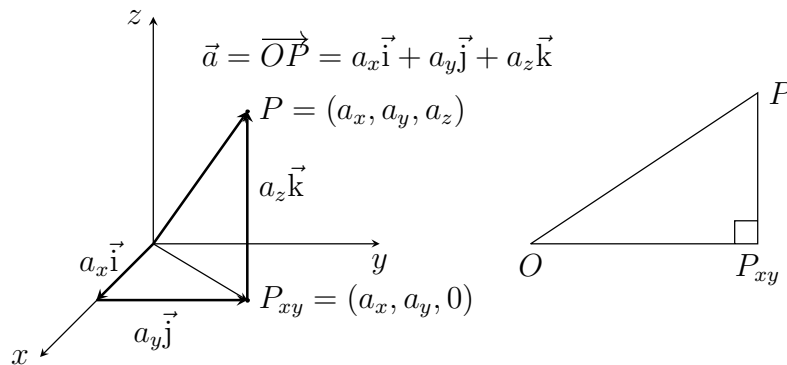
Lause 13 (1) Vektorin $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ pituus saadaan lausekkeesta

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

(2) Olkoon $P = (x_P, y_P, z_P)$ ja $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ kaksi pistettä. Pisteiden P ja Q etäisyys, eli janan $\overline{PQ}$ pituus, eli suuntaajan $\overrightarrow{PQ}$ pituus saadaan lausekkeesta

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}.$$

Perustelu: (1)



Vektori $\overrightarrow{OP_{xy}}$ on vaakasuora ja vektori $\overrightarrow{P_{xy}P}$ on pystysuora. Ne ovat siis kohtisuorassa. Kun kopioimme kolmion $\triangle OP_{xy}P$ kuvatasoon, syntyy suorakulmainen kolmio, jolle Pythagoran lauseen nojalla on voimassa

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}|^2 &= |\overrightarrow{OP_{xy}}|^2 + |\overrightarrow{P_{xy}P}|^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 &= (a_x^2 + a_y^2) + a_z^2. \end{aligned}$$

(2) Seuraa kohdasta (1). □

Lause 14 Kaksi avaruusvektoria $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ja $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ ja niiden välinen kulma γ toteuttavat yhtälön

$$\cos \gamma = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

GammaAvaruus

Perustelu: Piirretään vektoreille origosta alkavat edustajat. Olkoon edustajien loppupisteitä yhdistävän janan pituus c . Kosinilauseen mukaan:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \\ (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2 &= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - 2ab \cos \gamma \\ -2a_x b_x - 2a_y b_y - 2a_z b_z &= -2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \gamma \end{aligned}$$

□

Avaruusvektorin kiertäminen yleisesti käsitellään myöhemmin, kun olemme ensin saaneet sopivia työkaluja käyttöön. Jos voimme valita yhden koordinaattiakselin kiertoakselin suuntaiseksi, niin tehtävä helpottuu ja osaamme kuvata kierron helposti

Lause 15 (a) Jos avaruusvektoria $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ kierretään z -akselin ympäri positiiviseen kiertosuuntaan kulman α verran, niin kierretty vektori on

$$\vec{a}_{rot} = (\cos(\alpha) \cdot a_x - \sin(\alpha) \cdot a_y)\vec{i} + (\sin(\alpha) \cdot a_x + \cos(\alpha) \cdot a_y)\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

(b) Jos tasovektoria $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ kierretään z -akselin ympäri positiiviseen kiertosuuntaan kulman $\pi/2$ verran, niin kierretty vektori on

$$\vec{a}_{rot} = -a_y\vec{i} + a_x\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Konkreettisen avaruuden (x, y, z) -koordinaatisto

Fysiikan laskuissa usein suunnat ”vaakasuora” ja ”pystysuora” ovat luonnollisia ja ongelmattomia. Aina näin ei kuitenkaan ole ja joskus laskut helpottuvat, kun akselien suunnat valitaan tilanteeseen sopivasti. jatkossa kuitenkin odotamme aina, että valitut akselit ovat keskenään kohtisuorassa ja muodostavat positiivisesti suunnistetun koordinaatiston.

Kun varustamme tilan suorakulmaisella koordinaatistolla, valitsemme taas neljä ominaisuutta

1. Origo. Piste, jossa koordinaattiakselit leikkaavat.
2. x -akseli.
3. y -akseli, joka on kohtisuorassa x -akselia vastaan. z -akseli määräytyy nyt siitä, että se on kohtisuorassa sekä x - akselia että y akselia vastaan, ja kaikki akselit yhdessä muodostavat positiivisesti suunnistetun koordinaatiston. (Kun siis x - ja y -akselit on valittu, niin z -akseli määräytyy niistä, eikä sen suhteen enää ole valinnan mahdollisuuksia).
4. Akselien asteikko. Akseleilla tulee olla samat asteikot. Asteikkojen nollakohdat ovat origossa.

Edellä kohta 3 sisältää enemmän vaihtoehtoja kuin tason tapauksessa.

Lisää esi-
merkki.

2.3 Fysiikan voima-vektori

Sec:ForceVec

Voiman vaikutus massapisteen liiketilaan ja kiinteiden rakenteiden jännityksiin, on luonnon ilmiö, jota opitaan käsittelemään fysiikan kursseilla. Tässä materiaalissa voimaa käsitellään vain siinä määrin kuin se on tarpeen vektorilaskujen temiseksi sovel-lusesimerkeissä.

Voimalla on kolme ominaisuutta

1. Voimalla on suuruus f joka mitataan Newtonissa.
2. Voimalla on suunta, joka on helpointa ilmaista yksikkövektorilla $\vec{e}$.
3. Voimalla on vaikutuspiste.

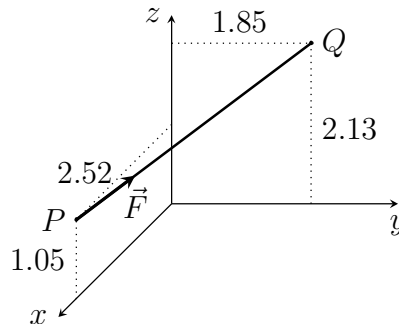
Tavallisesti vaikutuspiste tiedetään ja laskuissa tarvitaan voiman suuruutta ja suuntaa, joka esitetään voima-vektorina

$$\vec{F} = f \cdot \vec{e}.$$

Kun voimavektori $\vec{F}$ tiedetään, niin voiman suuruus on $f = |\vec{F}|$ ja voiman suunta on $\vec{e} = f^{-1}\vec{F}$, mutta vaikutuspiste ei sisälly merkintään.

Esimerkki 16 Huoneen pohjoisseinään kiinnitetään kiinnitysrengas 1,85m luoteisnurkasta ja 2,13m lattiasta. Toinen kiinnitysrengas kiinnitetään länsiseinään 2,52m luoteisnurkasta ja 1,05m lattiasta. Renkasiin kiinnitetään vaijeri, joka kiristetään niin, että kiristysvoima on 135,0N. Arvioidaan, että vaijerin päätepiste on 8mm seinän tasosta. Määritä länsiseinään vaikuttavan voiman vektori.

Ratkaisu: Asetetaan koordinaatiston origo lattian luoteisnurkkaan, x -akseli länsiseinän lattialistaa pitkin, y -akseli pohjoisseinän lattialistaa pitkin, z -akseli ylöspäin pitkin nurkkaa.



Vaijerin päätepisteiden koordinaatit ovat

$$P = (2.520; 0.008; 1.050),$$

$$Q = (0.008; 1.850; 2.130).$$

$$\begin{aligned}\vec{e} &= \frac{\vec{PQ}}{|\vec{PQ}|} = \frac{(x_Q - x_P)\vec{i} + (y_Q - y_P)\vec{j} + (z_Q - z_P)\vec{k}}{\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}} \\ &= \frac{-2.512\vec{i} + 1.842\vec{j} + 1.080\vec{k}}{\sqrt{(-2.512)^2 + 1.842^2 + 1.080^2}} \\ &= -0.76193\vec{i} + 0.55871\vec{j} + 0.32758\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= 135.0\text{N} \cdot (-0.76193\vec{i} + 0.55871\vec{j} + 0.32758\vec{k}) \\ &= -102.9\text{N} \cdot \vec{i} + 75.43\text{N} \cdot \vec{j} + 44.22\text{N} \cdot \vec{k}\end{aligned}$$

Esimerkin laskut voidaan tehdä Octavella seuraavasti:

```
octave:1> P = [2.520; 0.008; 1.050];
octave:2> Q = [0.008; 1.850; 2.130];
octave:3> PQ = Q-P
PQ =

    -2.5120
     1.8420
     1.0800

octave:4> e = PQ/norm(PQ)
e =
```

```

-0.76193
 0.55871
 0.32758

octave:5> F = 135.0*e
F =

-102.860
 75.426
 44.223

```

Esimerkki 17 Tarkastellaan kappaletta, jonka massa on 7,50 kg. kappale on vaakasuoralla alustalla. Kappaleen ja alustan välinen täysin kehittyneen lepokitkan kitkakerroin on 0,6 (kumi-märkä asfaltti). Kappaleeseen vaikuttaa voima $\vec{F} = F\vec{e}$, jonka suunta muodostaa 20° kulman vaakatason kanssa. Miten suuri tulee voiman olla, jotta kappale lähtee liikkeelle.

Exa:Vec1

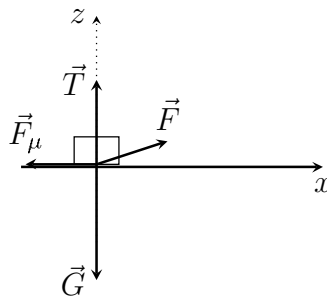


fig:Force01

Kuva 16. Kappale vaakasuoralla tasolla.

Kuvaan (16) on piirretty kappaleeseen vaikuttavia voimia: $\vec{G}$ kappaleen paino, $\vec{T}$ alustan tukivoima, $\vec{F}$ kappaleeseen vaikuttava ulkoinen voima, $\vec{F}_\mu$ kappaleen liikettä vastustava kitkavoima. Koska muut voimat ovat joko pystysuoria tai vaakasuoria, kannattaa myös voima $\vec{F}$ jakaa vaakasuoraan ja pystysuoraan komponenttiin.

$$\vec{F} = \underbrace{F \cos 20^\circ \cdot \vec{i}}_{=\vec{F}_x} + \underbrace{F \sin 20^\circ \cdot \vec{k}}_{=\vec{F}_z}.$$

Paino on

$$\vec{G} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 7,50 \text{ kg} \cdot (-\vec{k}) = -73,575 \text{ N} \cdot \vec{k}$$

Pystysuorien voimien summa on nolla, joten

$$\begin{aligned} \vec{T} + \vec{G} + \vec{F}_z &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{T} &= -\vec{G} - F \sin 20^\circ \cdot \vec{k} \\ \Leftrightarrow \vec{T} &= (73,575 \text{ N} - F \sin 20^\circ) \vec{k} \end{aligned}$$

Lepokitka-voiman suuruus on enintään $0.6 \cdot |\vec{T}|$, joten kappale lähtee liikkeelle, jos

$$\begin{aligned} |\vec{F}_x| &> 0.6 \cdot |\vec{T}| \\ \Leftrightarrow F \cos 20^\circ &> 0.6 \cdot (73,575 \text{ N} - F \sin 20^\circ) \\ \Leftrightarrow F(\cos 20^\circ + 0.6 \cdot \sin 20^\circ) &> 0.6 \cdot 73,575 \text{ N} \\ \Leftrightarrow F &> \frac{0.6 \cdot 73,575 \text{ N}}{\cos 20^\circ + 0.6 \cdot \sin 20^\circ} = 38,6 \text{ N}. \end{aligned}$$

Vastaus: Koska kitkakerroin tiedetään melko epätarkasti, niin täsmällistä raja-arvoa ei voida ilmoittaa. Annettujen arvojen perusteella voidaan sanoa, että voiman tulee olla noin 39 N, jotta kappale lähtee liikkeelle. $\square$

Edellä voiman jakaminen vaakasuoraan ja pystysuoraan osaan oli oleellista ja myös helppoa. Jatkossa joudumme jakamaan voiman tason suuntaiseen ja tasoa vastaan kohtisuoraan komponenttiin, kun taso ei ole vaakasuora. Tähän on olemassa helpot työkalut, joita ryhdymme seuraavaksi opettelemaan.

2.4 Pistetulo ja ristitulo

Sec:DCIntro

Tässä kappaleessa määrittelemme kaksi vektoreille määriteltyä tuloa; pistetulo ja ristitulo.

Määritelmät ja erilaiset tulosten ominaisuudet saattavat tuntua, sekavalta kokonaisuudelta. Koko tämän kappaleen ajan pidä kirkkaana mielessä se ero, että kahden vektorin pistetulon arvo on luku, ja kahden vektorin ristitulon arvo on vektori.

Ex:DC1

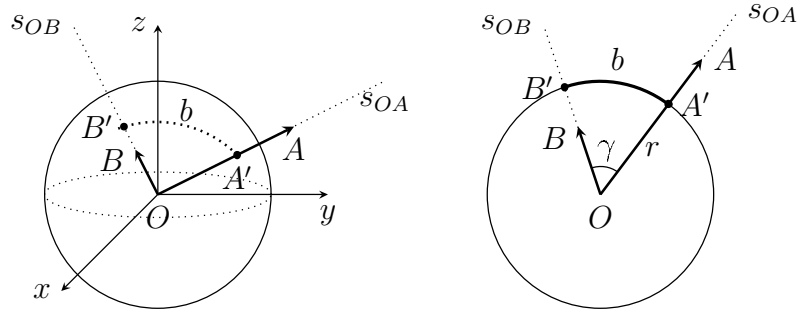
Esimerkki 18 Olkoon $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, ja $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Silloin

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -4, \quad (2.10)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 17\vec{i} - 10\vec{j} + \vec{k}. \quad (2.11)$$

Pian opimme laskemaan pistetulon ja ristitulon. Sitten voit palata tähän esimerkkiin ja tarkistaa laskut. Nyt on tärkeintä ymmärtää, että tulot antavat täysin eri tyyppiset tulokset.

Viimeistään tässä vaiheessa tulee määritellä, mitä tarkoitamme kahden avaruusvektorin välisellä kulmalla. Olkoon $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaksi avaruusvektoria. Piirrämme vektoreita edustavat origosta alkavat suuntajana $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ja $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Piirrämme vielä origosta alkavan ja



Kuva 17. Kahden avaruusvektorin välinen kulma.

laFig:VecAngle

pisteen A kautta kulkevan puolisuoran s_{OA} ja origosta alkavan ja pisteen B kautta kulkevan puolisuoran s_{OB} . Puolisuorat leikkaavat r -säteisen origo-keskisen pallon pisteissä A' ja B' . Leikkaamme kuvion tasolla, joka kulkee pisteiden O , A' , ja B' kautta.

Kuvassa [laFig:VecAngle](#) on piirretty syntyvä leikkauskuvio. Merkitään b :llä pisteitä A' ja B' yhdistävän lyhyemmän kaaren pituutta. Leikkauskuvaan syntyvä kulma

$$\gamma = \angle A'OB' = \angle AOB = \frac{b}{r}(\text{rad})$$

on vektoreiden välinen kulma. Konstruktiosta seuraa, että $0 \leq \gamma \leq \pi$. Jos $\gamma = 0$, niin vektorit ovat samansuuntaiset. Jos $\gamma = \pi$, niin vektorit ovat vastakkaissuuntaiset.

Monessa sovellustilanteessa vektorin avulla ilmaistaan suoran suunta. Siksi on tapana sanoa, että jos pisteiden O ja A kautta piirretty suora, ja pisteiden O ja B kautta piirretty suora ovat yhdensuuntaiset, niin myös vektorit ovat yhdensuuntaiset. Tämä tarkoittaa sitä, että vektorit ovat yhdensuuntaiset, jos ne ovat saman- tai vastakkaissuuntaiset.

Käytämme jatkossa seuraavia merkintöjä:

$$\begin{aligned} \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}, & \quad \text{jos vektorit ovat samansuuntaiset,} \\ \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}, & \quad \text{jos vektorit ovat vastakkaissuuntaiset,} \\ \vec{a} \parallel \vec{b}, & \quad \text{jos vektorit ovat yhdensuuntaiset,} \\ \vec{a} \perp \vec{b}, & \quad \text{jos vektorit ovat kohtisuorassa.} \end{aligned}$$

Määritelmä 19 Olkoon $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaksi tason (tai avaruuden) vektoria ja olkoon $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ niiden välinen kulma. Vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ pistetulo $\vec{a} \cdot \vec{b}$ on reaalityyppinen luku

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \gamma.$$

Kaksi vektoria ovat siis kohtisuorassa, jos niiden välinen kulma on $\pi/2$ (90°) tai ainakin toinen vektoreista on nollavektori. Pistetulon arvo voidaan laskea koordinaattien perusteella seuraavasti:

Lause 20 (1) Olkoon $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ ja $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ kaksi tasovektoria. Silloin

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

(2) Olkoon $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ja $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ kaksi avaruusvektoria. Silloin

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Perustelu: (1) Suora seuraus määritelmästä ja lauseesta II (sivu 25) ja lauseesta II (sivu 30). □

Octavessa on pistetulon laskemiseen funktio `dot (vec1, vec2)`. Periaate on se, että ensin esitellään vektorit, ja sitten lasketaan vektoreilla. Esimerkin 18 pistetulo lasketaan Octavella seuraavalla tavalla:

```
octave:1> a= [2; 3; -4];
octave:2> b = [1; 2; 3];
octave:3> ptulo = dot(a,b)
ptulo = -4
```

Pistetulo on siis helppo laskea koordinaattien avulla, vaikka emme tietäisikään vektoreiden välistä kulmaa. Kaksi pistetulon ominaisuutta tulee esiin varsin usein:

1. Kaksi vektoria, $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ovat kohtisuorassa jos ja vain, jos niiden pistetulo on nolla.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

2. Vektorin pituuden neliö on sen pistetulo itsensä kanssa.

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}.$$

Määritelmä 21 Olkoon $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaksi avaruuden vektoria ja olkoon $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ niiden välinen kulma. Vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ristitulo $\vec{a} \times \vec{b}$ on vektori, jonka pituus on

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \gamma,$$

ja suunta määräytyy seuraavasta kolmesta ehdosta

1. vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{a} \times \vec{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan,

2. vektorit $\vec{b}$ ja $\vec{a} \times \vec{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan,
3. vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{a} \times \vec{b}$ (tässä järjestyksessä!) muodostavat positiivisesti suunnistetun systeemin.⁴

DCintro_def1

Määritelmässä siis viitataan vektoreiden pituuksiin ja niiden väliseen kulmaan. Jos voimme valita koordinaatiston sopivasti, niin ristitulo voidaan rakentaa kuin lankkuaita. Aina ei ole järkevää käyttää montaa koordinaatistoa samassa laskussa, ja seuraava konstruktio jääkin siksi erikoisuudeksi, jota vähän käytetään. Sen avulla on kuitenkin helppo osoittaa että ristitulo noudattaa osittelulakia, mikä edelleen avaa meille kaavat, joilla ristitulon lasku voidaan tehdä vektoreiden koordinaattien avulla helposti.

Lause 22 Olkoon $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaksi avaruuden vektoria ja olkoon $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ niiden välinen kulma. Asetetaan koordinaatisto siten, että z -akseli on vektorin $\vec{a}$ suuntainen. x - ja y -akselit voidaan valita vapaasti, kuitenkin siten että syntyvä koordinaatisto on suora-kulmainen ja positiivisesti suunnistettu. Olkoon vektoreiden esitykset tässä koordinaatistossa

$$\begin{aligned}\vec{a} &= |\vec{a}| \vec{k}, \\ \vec{b} &= b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} = \overrightarrow{OP}.\end{aligned}$$

Ristitulo $\vec{a} \times \vec{b}$ voidaan nyt konstruoida kolmella askelella seuraavasti:

1. Projisoidaan P koordinaatiston (x, y) -tasoon. Projektion piste on $P_{xy} = (b_x, b_y, 0)$ ja suuntajanan $\overrightarrow{OP_{xy}}$ pituus on $|\vec{b}| \sin \gamma$.
2. Kierretään suuntajanaa $\overrightarrow{OP_{xy}}$ kulman $\pi/2$ verran positiiviseen kiertosuuntaan (x, y) -tasossa. Kierretty suuntajana on

$$\overrightarrow{OP_{xy, rot}} = -b_y \vec{i} + b_x \vec{j}.$$

3. Ristituluvektori saadaan nyt kertomalla edellä saatu vektori vektorin $\vec{a}$ pituudella:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \overrightarrow{OP_{xy, rot}} = -b_y |\vec{a}| \vec{i} + b_x |\vec{a}| \vec{j}.$$

Th:Cross1

⁴Ehdot 1–3 merkitsevät sitä, että ristituluvektori on kohtisuorassa $\vec{a}$:n ja $\vec{b}$:n tasoa vastaan ja osoittaa tämän tason yläpuolelle.

Perustelu: Pisteet O , P ja P_{xy} muodostavat $\vec{a}$:n ja $\vec{b}$:n määräämässä tasossa suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusan pituus on $|\vec{b}|$. Vaakasuora kateetti on pituudeltaan $|\overrightarrow{OP_{xy}}| = |\vec{b}| \sin \gamma$. Kierretty vektori on yhtä pitkä. Lopullisen ristitulovektorin pituus on $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \gamma$, kuten pitääkin.

Se, että kolmannen askeleen lopussa saatu ristitulovektori on kohtisuorassa vektoreita $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vastaan on konstruktion mukaan selvä. Riittävän hyvällä avaruudellisella hahmotuskyvyllä varustettu lukija voi todistaa tämän. Onneksi voimme tarkistaa kohtisuoruuden myös yksinkertaisella laskulla

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (-b_y |\vec{a}| \vec{i} + b_x |\vec{a}| \vec{j} + 0 \vec{k}) \cdot (-0 \vec{i} + 0 \vec{j} + |\vec{a}| \vec{k}) = 0 \quad (2.12)$$

$$\longrightarrow \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = (-b_y |\vec{a}| \vec{i} + b_x |\vec{a}| \vec{j} + 0 \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = 0 \quad (2.13)$$

$$\longrightarrow \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$$

Kolmikon $\vec{a}$, $\vec{b}$, ja $\vec{a} \times \vec{b}$ positiivinen suunnistus nähdään seuraavasti: aseta peukalo, etusormi ja keskisormi yhdensuuntaisina vektorin $\vec{a}$ suuntaisesti. Pidä peukalo $\vec{a}$:n suuntaisena, mutta käännä etu- ja keskisormi $\vec{b}$:n suuntaiseksi. Pidä peukalo ja etusormi paikallaan, mutta jatka keskisormen kääntämistä samaan suuntaan, kunnes se on xy -tasossa kohtisuorassa peukaloa vastaan. Lopuksi käännä keskisormea $\pi/2$ positiiviseen kiertosuuntaan xy -tasossa. Nyt peukalo on $\vec{a}$:n suuntainen, etusormi on $\vec{b}$:n suuntainen ja keskisormi on ristitulon $\vec{a} \times \vec{b}$ suuntainen. $\square$

Edellisen lauseen konstruktiota emme tässä opetusmonisteessa sovelle käytännössä kuin kerran. Se tapahtuu seuraavan lauseen todistuksessa.

Lause 23 *Olko $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ kolme avaruusvektoria ja olko r reaaliluku. Silloin*

- (1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$,
- (2) $(r\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r\vec{b}) = r(\vec{a} \times \vec{b})$
- (3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- (4) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Th:Cross2

Perustelu: (1) Määritelmän mukaan on selvää, että $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}|$. Kun haemme ristitulo-vektorille $\vec{a} \times \vec{b}$ suunnan oikean käden säännöllä, asetamme peukalon vektorin $\vec{a}$ suuntaiseksi ja etusormen vektorin $\vec{b}$ suuntaiseksi. Nyt keskisormi osoittaa ristitulon suunnan. Kun teemme saman ristitulon $\vec{b} \times \vec{a}$ osalta, niin peukalo ja etusormi vaihtavat paikkoja, jolloin keskisormi kääntyy osoittamaan päinvastaiseen suuntaan kuin edellä.

(2) Seuraa suoraan määritelmästä.

(3) Tarkastellaan vektoreita käyttäen suorakulmaista koordinaatistoa, jonka z -akseli on $\vec{a}$ -vektorin suuntainen. Silloin ristitulot voidaan määrittää kuten lauseessa 22. Nyt

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= -(b_y + c_y)|\vec{a}|\vec{i} + (b_x + c_x)|\vec{a}|\vec{j} \\ &= (-b_y|\vec{a}|\vec{i} + b_x|\vec{a}|\vec{j}) + (-c_y|\vec{a}|\vec{i} + c_x|\vec{a}|\vec{j}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}\end{aligned}$$

(4) Periaatteessa voisimme tehdä kuten kohdassa (3), mutta helpommalla pääsemme, kun vetoamme kohtiin (1) ja (3) seuraavalla tavalla

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &\stackrel{(1)}{=} -(\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})) \stackrel{(3)}{=} -(\vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}) \\ &\stackrel{(1)}{=} \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}\end{aligned}$$

□

DCintro_lause1

Lause 24 Vektoreiden $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ja $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ ristitulo on

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}.$$

Perustelu:

Määritelmästä seuraa, että $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$ ja

$$\begin{array}{lll}\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}\end{array}$$

Nämä ja osittelulait (lauseen 23 kohdat (3) ja (4)) antavat seuraavan tuloksen

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) \\ &= a_x b_x \vec{i} \times \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} \\ &\quad + a_y b_x \vec{j} \times \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \times \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k} \\ &\quad + a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \times \vec{k} \\ &= +a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} \\ &\quad - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} \\ &\quad + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}.\end{aligned}$$

□

Esimerkki 25 Laskemme tarkistuksen vuoksi esimerkin 18 ristitulon ensin käsin, sitten Octavella.

Ex:DC1

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}, \text{ ja} \\ \vec{b} &= \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} &= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} \\ &= (3 \cdot 3 - (-4) \cdot 2)\vec{i} + ((-4) \cdot 1 - 2 \cdot 3)\vec{j} + (2 \cdot 2 - 3 \cdot 1)\vec{k} \\ &= 17\vec{i} - 10\vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

Octavella

```
octave:2> a = [2; 3; -4];
octave:3> b = [1; 2; 3];
octave:4> rtulo = cross(a,b)
rtulo =

    17
   -10
     1
```

Edellä todetun perusteella voimme tehdä seuraavan yhteenvedon yhdensuuntaisuuden tutkimisesta pistetulon ja ristitulon avulla:

Lause 26 Olkoon $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaksi vektoria ja γ niiden välinen kulma. Silloin

$$\begin{array}{lll}(\gamma = 0) & \text{samansuuntaisuus:} & \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|, \\(\gamma = \pi) & \text{vastakkaisuuntaisuus:} & \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|, \\(\gamma = 0, \text{ tai } \gamma = \pi) & \text{yhdensuuntaisuus:} & \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}, \\(\gamma = \frac{\pi}{2}) & \text{kohtisuoruus:} & \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \\(\gamma < \frac{\pi}{2}) & \text{terävä kulma:} & \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0, \\(\gamma > \frac{\pi}{2}) & \text{tylppä kulma:} & \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0.\end{array}$$

2.5 Skalaari- ja vektoriprojektiot

Sec:OProjIntro

Edellä esimerkissä [Exa:Vec1](#) voima jaettiin vaakasuoraan ja sitä vastaan kohtisuorassa olevaan pystysuoraan komponenttiin. Jatkossa ”vaakasuoran” sijassa on jokin muu suunta. Edellisessä kappaleessa esitellyt pistetulo ja ristitulo antavat työkalut tähän komponenttien erotteluun.

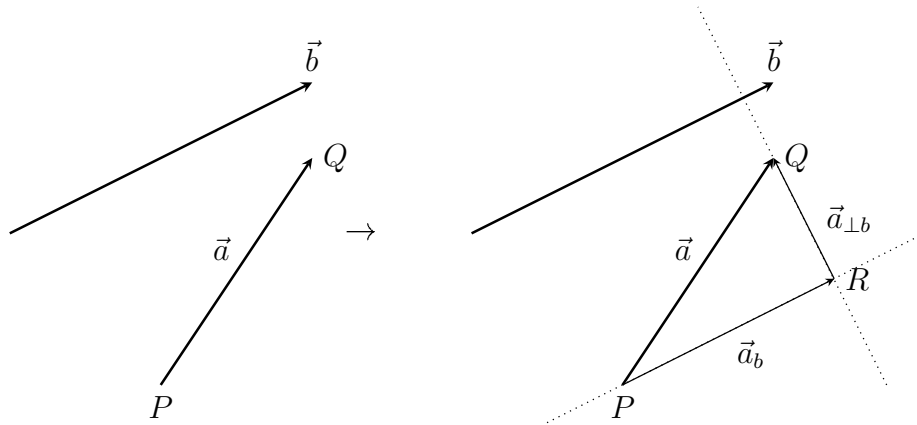
2.5.1 Vektorin projektio vektorin suuntaan

Ssec:VecProj

Tasovektoreiden tapauksessa tämän kappaleen asiat ovat helpommin piirrettävissä, joten aloitamme siitä. Kuvaan 18 on piirretty kaksi tasovektoria $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ja $\vec{b}$. Piirretään pisteen P kautta vektorin $\vec{b}$ suuntainen apusuora, ja piirretään pisteen Q kautta apusuora, joka on kohtisuorassa ensin piirrettyä apusuoraa vastaan. Toinen apusuora on myös kohtisuorassa vektoria $\vec{b}$ vastaan. Lisätyt apusuorat leikkaavat toisensa kohtisuorasti pisteessä R . Merkitään

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR} &= \vec{a}_b && \text{”vektorin } b \text{ suuntainen } a\text{:n komponentti”}, \text{ ja} \\ \overrightarrow{RQ} &= \vec{a}_{\perp b} && \text{”vektoria } b \text{ vastaan kohtisuora } a\text{:n komponentti”}.\end{aligned}$$

Nyt $\vec{a} = \vec{a}_b + \vec{a}_{\perp b}$, ja vektori $\vec{a}$ on siis jaettu kahteen osaan, joista ensimmäinen on b :n suuntainen ja toinen on b :tä vastaan kohtisuora.



Kuva 18. Vektorin $\vec{a}$ komponentit: $\vec{b}$:n suuntainen komponentti $\vec{a}_b$, ja $\vec{b}$:tä vastaan kohtisuora komponentti $\vec{a}_{\perp b}$

Fig:VecOComp1

Avaruusvektoreiden tapauksessa edellinen konstruktio vaatii huolellisuutta toisen apusuoran valinnassa. Emme tee konstruktioista avaruusversiota, vaan määrittelemme komponentit helpolla ja yleisellä tavalla:

Määritelmä 27 Olkoon $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaksi tasovektoria, tai kaksi avaruusvektoria. Jos $\vec{a} = \vec{a}_b + \vec{a}_{\perp b}$, missä $\vec{a}_b$ on vektorin $\vec{b}$ suuntainen ja $\vec{a}_{\perp b}$ on kohtisuorassa vektoria $\vec{b}$ vastaan, niin sanomme, että

$\vec{a}_b$ on vektorin $\vec{b}$ suuntainen vektorin $\vec{a}$ komponentti,

$\vec{a}_{\perp b}$ on vektoria $\vec{b}$ vastaan kohtisuora vektorin $\vec{a}$ komponentti,

Sanomme myös, että $\vec{a}_b$ on vektorin $\vec{a}$ vektoriprojektio vektorin $\vec{b}$ suuntaan.

Vektorin $\vec{a}$ skalaariprojektio vektorin $\vec{b}$ suuntaan, on

$$a_b = \begin{cases} +|\vec{a}_b|, & \text{kun } \vec{a}_b \uparrow\uparrow \vec{b} \\ -|\vec{a}_b|, & \text{kun } \vec{a}_b \uparrow\downarrow \vec{b} \end{cases}.$$

Vektoriprojektio on siis vektori ja skalaari projektio on luku. Projektioille on olemassa helpot kaavat pistetulon avulla.

Lause 28 Olkoon $\vec{b}_0$ vektorin $\vec{b}$ suuntainen yksikkövektori (eli $\vec{b}_0 = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$), ja olkoon γ vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välinen kulma. Silloin

$$\begin{aligned} \vec{a}_b &= |\vec{a}| \cos \gamma \vec{b}_0 \\ &= \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|} \vec{b}_0 = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{(\vec{b} \cdot \vec{b})} \vec{b}, \\ a_b &= |\vec{a}| \cos \gamma = \vec{a} \cdot \vec{b}_0 = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}}. \end{aligned}$$

Perustelu: On selvää, että lauseen kaavasta saatu komponentti $\vec{a}_b$ on vektorin $\vec{b}$ suuntainen. On vielä osoitettava, että $(\vec{a} - \vec{a}_b) \perp \vec{b}$. Tämä on suora läpilasku:

$$(\vec{a} - \vec{a}_b) \cdot \vec{b} = \left(\vec{a} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{(\vec{b} \cdot \vec{b})} \vec{b} \right) \cdot \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{(\vec{b} \cdot \vec{b})} \vec{b} \cdot \vec{b} = 0.$$

□

Jos $\vec{b}$ on yksikkövektori (jonka pituus on siis yksi), niin vektoriprojektion ja skalaariprojektion kaavat saavat hyvin yksinkertaiset muodot

Th:VecProj1

Lause 29 Jos $\vec{e}$ on yksikkövektori, niin

$$\begin{aligned} \vec{a}_e &= (\vec{a} \cdot \vec{e}) \vec{e}, \\ a_e &= \vec{a} \cdot \vec{e} \end{aligned}$$

Perustelu: HT

□

Lauseen ^{Th:VecProj1}29 kaavat ovat päteviä vain, jos $\vec{e}$ on yksikkövektori. Jos laskija käyttää usein kyseisiä kaavoja, niin on inhimillistä alkaa ajatella, että ”näinhän tämä aina lasketaan”. (Muista: Lauseen ^{Th:VecProj1}29 kaavat eivät ole tosia, jos $|\vec{e}| \neq 1$.)

2.5.2 Voiman momentti pisteen suhteen tasossa

Ssec:FMomPl

Esimerkki 30 Tarkastellaan kuvan [fig:vmP01](#) mukaista tilannetta, jossa tanko, jonka pituus on $L = 50\text{ cm}$ on ripustettu yläpäästään siten, että se pääsee kiertymään ripustuspiisteensä ympäri. Tankoon vaikuttaa paino $G = 20\text{ N}$ alaspäin, jonka vaikutuspiste on tangon keskipiste 25.0 cm ripustuspiisteestä. Lisäksi tankoon vaikuttaa tukivoima $\vec{T}$ ripustuspiisteeseen, ja kaksi vaakasuoraa voimaa: $F_1 = 12.0\text{ N}$ vasemmalle (vaikutuspiste $r_1 = 10.0\text{ cm}$ ripustuspiisteestä) ja $F_2 = 6.0\text{ N}$ oikealle (vaikutuspiste $r_2 = 30.0\text{ cm}$ ripustuspiisteestä). Ensimmäinen voima pyrkii kiertämään tankoa negatiiviseen kiertosuuntaan (myötäpäivään), ja toinen voima pyrkii kiertämään tankoa positiiviseen kiertosuuntaan (vastapäivään). Kuvaan ei ole piirretty ripustuspiisteeseen vaikuttavaa tukivoimaa, eikä massakeskipisteeseen vaikuttavaa painoa – ne otetaan mukaan seuraavassa esimerkissä. Kumpaan suuntaan tanko alkaa kiertyä?

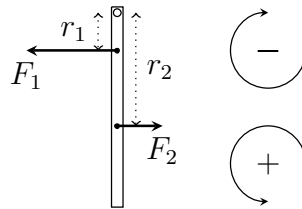


fig:vmP01

Kuva 19. Kilpailevat momentit.

Ratkaisevia ovat nyt voimien momentit (momentti = voima kertaa varsi). Momentit ovat

$$M_1 = -r_1 F_1 = -0.100\text{ m} \cdot 12.0\text{ N} = -1.20\text{ Nm}$$

$$M_2 = +r_2 F_2 = +0.300\text{ m} \cdot 6.0\text{ N} = +1.80\text{ Nm}$$

Momenttien merkit määräytyvät siitä, mihin kiertosuuntaan momentti pyrkii kiertämään kappaletta. Tämä vaatii laskijalta harkintaa. Kokonaismomentti on $M_1 + M_2 = +0.60\text{ Nm}$, joten tanko alkaa kiertyä positiiviseen suuntaan.

Merkit saadaan kätevästi ilman erillistä harkintaakin. Upotetaan taso avaruuden x, y -tasoon, ja korvataan varret vektoreilla kiertopisteestä voiman vaikutuspisteeseen. Momentti lasketaan kaavalla

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Nyt

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = -0.100\text{ m}\vec{j} \times (-12.0\text{ N}\vec{i}) = -1.20\text{ Nm}\vec{k}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = -0.300\text{ m}\vec{j} \times 6.0\text{ N}\vec{i} = 1.80\text{ Nm}\vec{k}$$

Esimerkki 31 Jatketaan edellisen esimerkin tarkastelua. Tanko kiertyy kulman α verran. Tukivoimalla ei edelleenkään ole momenttia, koska sen varsi on nolla, mutta painolla on nyt momentti

$$M_G = -\frac{L}{2} \sin \alpha G.$$

(Ks. kuva 20) Millä kulman α arvolla kokonaismomentti on nolla?

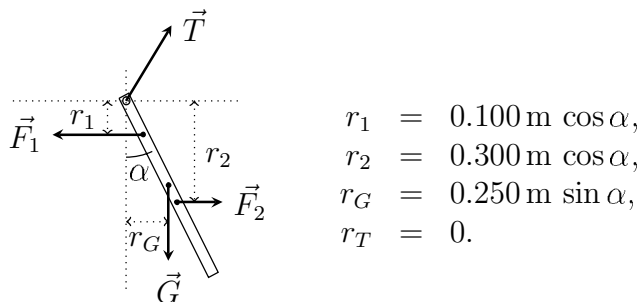


fig:vmP02

Kuva 20. Momenttien tasapaino.

Tasapainon momenttiehto on nyt

$$\begin{aligned} -r_1 F_1 + r_2 F_2 - r_G G &= 0 \\ \Leftrightarrow -0.100 \text{ m} \cos \alpha \cdot 12.0 \text{ N} + 0.300 \text{ m} \cos \alpha \cdot 6.0 \text{ N} - 0.250 \text{ m} \sin \alpha \cdot 20.0 \text{ N} &= 0 \\ \Leftrightarrow 0.600 \text{ Nm} \cos \alpha - 5.00 \text{ Nm} \sin \alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow \tan \alpha &= 0.120 \\ \Leftrightarrow \alpha = 0.1194 \text{ (rad)} &= 6.84^\circ. \quad \square \end{aligned}$$

Edellä voimat olivat vaaka- tai pystysuoria, mikä aina helpottaa laskemista. Entä jos minkään ei tarvitse olla pystyä tai vaakaa?

Tarkastellaan seuraavaksi kuvan 21 mukaista tilannetta.

Kuvan merkinnöillä on seuraavat tulkinnat:

- $\vec{r}$ = vektori kiertopisteestä voiman vaikutuspisteeseen (varsivektori),
- $r_\perp$ = kiertopisteen etäisyys voiman vaikutussuorasta,
- $\vec{F}$ = voimavektori,
- $\vec{F}_\perp$ = voiman vartta vastaan kohtisuora komponentti,
- α = poikkeama kohtisuoruudesta.

Lause 32 Kuvan 21 merkinnöillä voiman momentti on

$$\begin{aligned} M &= (\pm) r F_\perp = (\pm) r_\perp F, \quad \text{ja} \\ \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} = M \vec{k}. \end{aligned}$$

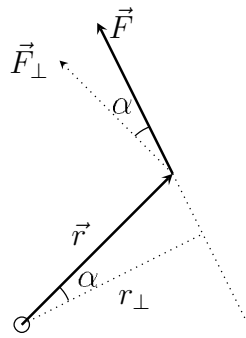


fig:vmP03

Kuva 21. Voiman momentti tasossa.

Perustelu: Tutkimme nyt vain kuvan ^{fig:vmP03}21 tilanteen. (Täydellinen perustelu vaatisi tutkia myös kuviot, joissa momentti on negatiivinen ja $\alpha < 0$)

(1) $M = (\pm)rF_{\perp}$ on momentin perusmääritelmän mukainen lauseke. (Huomaa, että voiman varren suuntaisella komponentilla ei ole momenttia.)

(2)

$$M = (\pm)rF_{\perp} = (\pm)rF \cos \alpha = (\pm)(r \cos \alpha) F = (\pm)r_{\perp} F.$$

(3)

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin(\pi/2 - \alpha) = rF \cos \alpha = |M|.$$

Merkkien oikeellisuus nähdään oikean käden säännöllä.

□

On syytä korostaa, että edellisen lauseen kaavat koskevat tilannetta, jossa kaikki vektorit ovat samassa tasossa. Kyse on siis taso-ongelman käsittelystä. Erityisesti pyörivien koneiden yhteydessä kappaleen pyöriminen tapahtuu akselin eikä pisteen ympäri. Tämä tuo laskutehtävään yhden uuden vektorin (akselin suunta).

Voiman momenttia akselin suhteen käsitellään myöhemmin luvussa ^{Ssec:FM6sSpaceFM}?? (sivu ??).

3 LINEAARISET YHTÄLÖRYHMÄT

Ch:YhtRyh

3.1 Rivioperaatiot

Sec:laRowOper

Sovitaan ensin merkintätavoista. Ratkaisemme ensin yksinkertaisen yhtälöparin

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \quad (3.1)$$

Lisäämme ensimmäisen yhtälön kahdella kerrottuna toiseen, jolloin yhtälöryhmä menee muotoon, josta ratkaisu on helppo saada esiin. (Huomaa merkinnät, jotka on tehty yhtälöryhmän oikealle puolelle.)

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} *2 \\ \leftarrow + \end{array} \quad (3.2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 5y = 10 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad (3.3)$$

Yhtälöstä (2) saadaan arvo $y = 2$ ja sijoittamalla tämä arvo yhtälöön (1) saadaan

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot 2 &= 3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis $x = -1$, $y = 2$.

Edellä käytetty rivioperaatio oli rivin lisääminen luvulla kerrottuna toiseen.

Seuraavassa esimerkissä käytämme samaa rivioperaatiota toistuvasti. Jokaisessa väli-muodossa on yksi termi merkitty hakasuluin. Tätä termiä sanomme *pivot-termiksi*. Rivioperaatioiden kertoimet valitaan niin, että pivot-termin alapuolella olevat samanmuotoiset termit häviävät. Pivot-termin valintaa ja sitä seuraavia rivioperaatioita sanomme *pivotoinniksi*.

Esimerkki 33

$$\left\{ \begin{array}{rcll} [x] + y - z + 2w & = & 2 & \\ -x & + & 3z - w & = 6 \\ & - & y + 2z + 3w & = 2 \\ 2x + y + 2z - w & = & 1 & \end{array} \right| \begin{array}{l} *1 \\ \leftarrow + \\ \\ \leftarrow - \end{array} \quad \begin{array}{l} *2 \\ \\ \\ \end{array} \quad (3.4)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x + y - z + 2w & = & 2 & \\ & [y] + 2z + w & = & 8 \\ - & y + 2z + 3w & = & 2 \\ - & y + 4z - 5w & = & -3 \end{array} \right| \begin{array}{l} *1 \\ \leftarrow + \\ \\ \leftarrow + \end{array} \quad \begin{array}{l} *1 \\ \\ \\ \end{array} \quad (3.5)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x + y - z + 2w & = & 2 & \\ & y + 2z + w & = & 8 \\ & & [4z] + 4w & = 10 \\ & & 6z - 4w & = 5 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ *3/2 \\ \leftarrow - \end{array} \quad (3.6)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x + y - z + 2w & = & 2 & \\ & y + 2z + w & = & 8 \\ & & 4z + 4w & = 10 \\ & & - & 10w = -10 \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \quad (3.7)$$

$$(4) \longrightarrow w = 1$$

$$(3) \longrightarrow 4z + 4 \cdot 1 = 10 \quad \Leftrightarrow z = 1.5$$

$$(2) \longrightarrow y + 2 \cdot 1.5 + 1 = 8 \quad \Leftrightarrow y = 4$$

$$(1) \longrightarrow x + 4 - 1.5 + 2 \cdot 1 = 2 \quad \Leftrightarrow x = -2.5$$

Jatkossa tulemme käyttämään seuraavia rivioperaatioita:

Rivin lisääminen toiseen riviin luvulla kerrottuna. On selvää, että tämä rivioperaatio ei muuta yhtälöryhmän ratkaisua. Esimerkiksi yhtälöryhmässä (3.4) pivot-rivi (rivi 1) lisätään yhdellä kerrottuna riviin 2 ja pivot-rivi vähennetään kahdella kerrottuna rivistä 4. Huomaa, miten pivotoinnissa käytetyt kertoimet nähdään pivot-sarakkeen (x -sarake) vastaavan rivin kertoimista. Varmista edellisen esimerkin avulla, että varmasti ymmärrät rivioperaatiot.

Yhtälöryhmän (3.5) neljäs yhtälö syntyy seuraavasti

termi	$4 \cdot \text{rivi (3.4)}$	$-2 \cdot \text{pivot (3.4)}$	$=$	$4 \cdot \text{rivi (3.5)}$
x -termi	$2x$	$-2 \cdot x$	$=$	
y -termi	y	$-2 \cdot y$	$=$	$-y$
z -termi	$2z$	$-2 \cdot (-z)$	$=$	$4z$
w -termi	$-z$	$-2 \cdot 2w$	$=$	$-5w$
RHS	1	$-2 \cdot 2$	$=$	-3

Nyrkkisääntö: Rivioperaatiota tehtäessä käydään läpi kaikki sarakkeet, myöskin RHS.

Rivin kertominen (tai jakaminen) nolasta eroavalla luvulla.

Kahden rivin vaihtaminen.

On selvää, että rivioperaatiot eivät muuta yhtälöryhmän ratkaisua. Tavoite onkin nyt muuttaa yhtälöryhmän muotoa muuttamatta ratkaisua. Pyrimme siihen, että muoto saadaan sellaiseksi, että viimeisessä yhtälössä on vain yksi muuttuja w , joka saadaan ratkaistua tästä yhtälöstä. Kun toiseksi viimeinen yhtälö viedään muotoon, jossa esiintyy edellisen muuttujan lisäksi vain yksi muuttuja (tässä w :n lisäksi z), niin sijoittamalla w :n arvo yhtälöön saadaan uusi muuttuja z ratkaistua.

Useimmissa tapauksissa tavoittelemamme muoto saadaan helposti suorittamalla peräkkäiset pivotoinnit seuraavasti. Ensimmäiseksi pivot-termiksi valitaan ensimmäisen yhtälön x -termi. Toiseen pivotointiin valitsemme pivot-termiksi toisen yhtälön y -termin. Kolmanteen pivotointiin valitsemme pivot-termiksi kolmannen yhtälön z -termin. Jne. Normaali ratkaisu onkin siis valita seuraavaksi pivot-termiksi ”seuraava muuttuja – seuraava rivi”. Näin jatkaen yhtälöryhmä saa tavanomaiselle ratkaisulle tyypillisen kolmiomaisen muodon.

Joskus ”seuraava muuttuja – seuraava rivi” -periaatteen mukaisessa paikassa on tyhjää; haluttu termi puuttuu. Silloin on etsittävä haluttua muuttujaa sisältävää yhtälöä alemmilta riveiltä. Jos tällainen rivi löytyy, vaihdetaan se pivot-rivin paikalle ja jatketaan normaalisti. Jos muuttujaa ei esiinny millään jäljellä olevalla rivillä, niin siirrymme seuraavaan muuttujaan (sarakeeseen). Jos jouduimme hyppäämään pivotoinneissa yhden sarakkeen yli, on tämä merkille pantava asia. Pivotoimaton sarake kannattaa merkitä käsin laskettaessa, jotta varmasti muistaa jatkossa huomioda sen oikein. Tämän kapaleen esimerkeissä pivot-termit on merkitty hakasuluin. Pivotoinneissa yli-hypätty sarake erottuu siitä, ettei sillä ole viimeisessä esityksessä pivot-merkintää.

Seuraavat esimerkit valaisevat asiaa.

Esimerkki 34

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} [x] & + & y & + & z & + & 2w & = & 1 \\ -3x & - & 3y & & & - & w & = & 1 \\ & & + & y & - & 2z & + & 3w & = & -1 \\ 2x & + & 3y & + & 3z & + & 10w & = & 1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} *3 \\ \leftarrow + \\ \\ \leftarrow - \end{array} \right. \quad (3.8)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} (x) & + & y & + & z & + & 2w & = & 1 \\ & & & & 3z & + & 5w & = & 4 \\ & & & y & - & 2z & + & 3w & = & -1 \\ & & & y & + & z & + & 6w & = & -1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right. \text{vaihdetaan} \quad (3.9)$$

Uudeksi pivot-termiksi ei nyt voida ottaa toisen yhtälön y-termiä. Koska haluamme edetä systemaattisesti, vaihdamme toisen ja kolmannen rivin keskenään ja jatkamme sen jälkeen systemaattisesti.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} (x) & + & y & + & z & + & 2w & = & 1 \\ & & [y] & - & 2z & + & 3w & = & -1 \\ & & & & 3z & + & 5w & = & 4 \\ & & & y & + & z & + & 6w & = & -1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} *1 \\ \\ \leftarrow - \end{array} \right. \quad (3.10)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} (x) & + & y & + & z & + & 2w & = & 1 \\ & & (y) & - & 2z & + & 3w & = & -1 \\ & & & & [3z] & + & 5w & = & 4 \\ & & & & 3z & + & 3w & = & 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \\ \\ *1 \\ \leftarrow - \end{array} \right. \quad (3.11)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} (x) & + & y & + & z & + & 2w & = & 1 \\ & & (y) & - & 2z & + & 3w & = & -1 \\ & & & & (3z) & + & 5w & = & 4 \\ & & & & [- & 2w] & = & -4 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

$$(4) \rightarrow w = (-4)/(-2) = 2 \quad (3.13)$$

$$(3) \rightarrow z = (4 - 5 \cdot 2)/3 = -2 \quad (3.14)$$

$$(2) \rightarrow y = -1 + 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 = -11 \quad (3.15)$$

$$(1) \rightarrow x = 1 - (-11) - (-2) - 2 \cdot 2 = 10 \quad (3.16)$$

Saatu ratkaisu kannattaa aina tarkistaa sijoittamalla saadut arvot **alkuperäiseen** yhtälöryhmään:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 10 & + & (-11) & + & (-2) & + & 2 \cdot 2 & = & 1 \\ -3 \cdot 10 & - & 3(-11) & & & - & 2 & = & 1 \\ & & + & (-11) & - & 2(-2) & + & 3 \cdot 2 & = & -1 \\ 2 \cdot 10 & + & 3(-11) & + & 3(-2) & + & 10 \cdot 2 & = & 1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} ok \\ ok \\ ok \\ ok \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Joskus käy niin, että jostakin yhtälöstä häviävät kaikki muuttujat. Jos syntyvä yhtälö on tyyppiä $0 = 0$, niin se on (triviaalisti) tosi. Vaihdetaan tämä yhtälö ryhmän viimeiseksi

ja jatketaan normaalisti.

Jos yhtälö on tyyppiä $0 = a$ ($a \neq 0$), niin yhtälö on epätosi ja yhtälöryhmällä ei voi olla yhtään ratkaisua, joten ratkaisun etsiminen voidaan lopettaa.

Jos on syntynyt epätosi yhtälö, tai kaikki pivotoimattomat yhtälöt ovat triviaaleja, päättelemme seuraavasti:

(1) Jos on syntynyt epätosi yhtälö,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \quad \quad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 0 = 5 \quad \text{epätosi} \rightarrow \text{ei ratkaisua} \\ \quad \quad \quad \star + \star + \dots + \star = \star \\ \quad \quad \quad \star + \star + \dots + \star = \star \end{array} \right.$$

niin lopetamme ratkaisun etsimisen ja ilmoitamme, että **ratkaisujoukko on tyhjä**.

(2) Jos ei-triviaaleja yhtälöitä on yhtä monta kuin muuttujaa,

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{11}x_1) + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \quad (a_{22}x_2) + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \quad \quad (a_{nn}x_n) = b_n \\ \quad \quad \quad \quad \quad 0 = 0 \end{array} \right.$$

niin ratkaisemme muuttujien arvot palautuvien sijoitusten avulla.

(3) Jos ei-triviaaleja yhtälöitä on m kappaletta ja muuttujia on n kpl ja $m < n$, niin siirrämme RHS:iin muuttujat, joita ei esiinny pivot-termeissä. Pivotoinnissa mukana olleet muuttujat ratkaistaan peräkkäisillä sijoituksilla.

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{11}x_1) + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = a_{1(m+1)}x_{m+1} \dots a_{1n}x_n + b_1 \\ \quad \quad (a_{22}x_2) + \dots + a_{2m}x_m = a_{2(m+1)}x_{m+1} \dots a_{2n}x_n + b_2 \\ \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \quad \quad (a_{mm}x_m) = a_{m(m+1)}x_{m+1} \dots a_{mn}x_n + b_m \\ \quad \quad \quad \quad \quad 0 = 0 \end{array} \right.$$

Ratkaisuja on nyt ääretön määrä. On kuitenkin oltava huolellinen vastausta kirjoittaessa. Yhtälöryhmä ei ole aina tosi. Periaate on se, että muuttujille $x_{m+1}, \dots, x_n$ voidaan antaa mitkä tahansa numeroarvot ja tämän jälkeen muuttujien $x_1, \dots, x_m$ arvot saadaan

palautuvilla sijoituksella viimeisestä yhtälöryhmän muodosta.

Seuraavissa esimerkeissä tulevat vastaan kaikki edellä esitetyt tapaukset. Esimerkeissä yksinkertaistetaan välimuotoja siirtymällä kerroin-kaavio -esitykseen. Tämä merkitsee sitä, että jätämme muuttujat kirjoittamatta. Kertoimen paikka kaaviossa kertoo minkä muuttujan kerroin se on (sarake) ja mihin yhtälöön se kuuluu (rivi).

Esimerkki 35

$$\begin{cases} [x] - y + z = 5 \\ -3x + 3y - 3z = 3 \\ \quad 2y - 2z = -1 \\ 2x + 3y + 3z = 2 \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -1 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \quad *3 \quad *2 \\ \leftarrow + \\ \quad \quad \quad \leftarrow - \end{array} \quad (3.19)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \rightarrow \text{epätosi, ei ratkaisua} \\ \text{Vastaus: ratkaisujoukko on tyhjä.} \end{array} \quad (3.20)$$

Esimerkki 36

$$\begin{cases} [x] - y + z = -1 \\ -3x + 3y - 3z = 3 \\ \quad 2y - 2z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \quad *3 \quad *2 \\ \leftarrow + \\ \quad \quad \quad \leftarrow - \end{array} \quad (3.22)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow | \text{vaihdetaan} \\ \leftarrow | \end{array} \quad (3.23)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow - \\ \quad *2 \end{array} \quad (3.24)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 1 & -1 \\ 0 & [1] & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} *2 \\ \leftarrow - \end{array} \quad (3.25)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 1 & -1 \\ 0 & (1) & 5 & 6 \\ 0 & 0 & (-12) & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \quad (3.26)$$

$$(3) \rightarrow z = 1 \quad (3.27)$$

$$(2) \rightarrow y = 6 - 5 \cdot 1 = 1 \quad (3.28)$$

$$(1) \rightarrow x = -1 + 1 - 1 = -1 \quad (3.29)$$

Vastaus: $x = -1$, $y = 1$ ja $z = 1$.

Esimerkki 37

$$\begin{cases} x + y + z + 2w = 1 \\ -3x - 3y - z = 1 \\ \quad + y - 2z + 3w = -1 \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} [1] & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} *3 \\ \leftarrow + \end{array} \quad (3.31)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \text{vaihdetaan} \quad (3.32)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & (1) & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & [2] & 6 & 4 \end{array} \right) \quad (3.33)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 - 2w \\ \quad y - 2z = -1 - 3w \\ \quad \quad 2z = 4 - 6w \end{cases} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \quad (3.34)$$

$$(3) \rightarrow z = (4 - 6w)/2 = 2 - 3w \quad (3.35)$$

$$(2) \rightarrow y = (-1 - 3w + 2(2 - 3w)) = 3 - 9w \quad (3.36)$$

$$(1) \rightarrow x = (1 - 2w - (3 - 9w) - (2 - 3w)) = -4 + 10w \quad (3.37)$$

Vastaus

$$\begin{cases} x = -4 + 10w \\ y = 3 - 9w \\ z = 2 - 3w \\ w = w \end{cases}$$

Esimerkki 38

$$\begin{cases} x - 2y - z + 2w = 1 \\ -3x + 3y - 5w = 1 \\ y + z = -1 \\ 2x + y + 3z + 6w = 5 \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} [1] & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{l} *3 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{array} \right. \quad *2 \quad (3.39)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 3 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right. \quad \text{vaihdetään} \quad (3.40)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & [1] & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 3 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{l} *3 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{array} \right. \quad *5 \quad (3.41)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & (1) & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & [1] & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{l} *2 \\ \leftarrow - \end{array} \right. \quad (3.42)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & (1) & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & (1) & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (3.43)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x) - 2y + 2w = 1 + z \\ (y) = -1 - z \\ (w) = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \right. \quad (3.44)$$

$$(3) \rightarrow w = 4 \quad (3.45)$$

$$(2) \rightarrow y = -1 - z \quad (3.46)$$

$$(1) \rightarrow x = 1 + z + 2(-1 - z) - 2 \cdot 4 = -9 - z \quad (3.47)$$

Vastaus

$$\begin{cases} x = -9 - z \\ y = -1 - z \\ z = z \\ w = 4 \end{cases}$$

3.2 Lineaarikombinaatiot

Sec:laLinComb

Yhtälöryhmää ratkaistaessa laskimme kerroinkaavion riveillä. Jatkossa vastaavia operaatioita tehdään niin paljon, että asiaan kannattaa sopia merkinnät ja laskusäännöt. Sovimme, että n :stä reaalityluvusta muodostuva yksirivinen kaavio

$$\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n) \quad (3.48)$$

on *rivivektori*, ja vastaava yhdestä sarakkeesta muodostuva kaavio

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

on *sarakevektori*. Lukuja a_k sanotaan vektorin $\vec{a}$ *koordinaateiksi*. Sarakevektorille sovitetaan myös merkintätapa

$$\vec{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)^T \quad (3.50)$$

missä yläindeksi T merkitsee *transponointia*, missä rivit muutetaan sarakkeiksi ja sarakkeet riveiksi.

Määritelmä 39 Olkoon $\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ ja $\vec{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$ kaksi n -alkioista rivivektoria ja $r \in \mathbb{R}$ reaalityluku. Määritellään reaalityluvulla kertominen ja vektoreiden yhteen- ja vähennyslasku seuraavasti.

$$\begin{aligned} r \cdot \vec{a} &= r \cdot (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n) \\ &= (r \cdot a_1 \ r \cdot a_2 \ r \cdot a_3 \ \dots \ r \cdot a_n) \\ \vec{a} + \vec{b} &= (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n) + (b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_n) \\ &= (a_1 + b_1 \ a_2 + b_2 \ a_3 + b_3 \ \dots \ a_n + b_n) \\ \vec{a} - \vec{b} &= (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n) - (b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_n) \\ &= (a_1 - b_1 \ a_2 - b_2 \ a_3 - b_3 \ \dots \ a_n - b_n) \end{aligned}$$

Sarake vektoreiden kertominen reaalityluvulla ja sarakevektoreiden summa määritellään vastaavalla tavalla.

Esimerkki 40

$$\begin{aligned} 5 \cdot (1 \ -2 \ 0) &= (5 \ -10 \ 0) \\ (1 \ -2 \ 0) + (2 \ 4 \ -1) &= (3 \ 2 \ -1) \end{aligned}$$

Määritelmä 41 Vektorit $\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ ja $\vec{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$ ovat samat (identtiset), jos niillä niiden koordinaatit ovat samat

$$a_k = b_k, \text{ kaikilla } k = 1, \dots, n$$

Määritelmä 42 Vektoria, jonka kaikki koordinaatit ovat nollia sanomme nollavektoriaksi ja merkitsemme

$$(0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) = \vec{0}$$

Näillä merkinnöillä voimme nyt tehdä melko tutulta tuntuvaa laskentaa. Vektoreita sisältävien lausekkeiden käsittely muistuttaa hyvin paljon tuttua kirjainlaskentaa. Jos esimerkiksi olemme ratkaisemassa vektoria $\vec{x}$ yhtälöstä $\vec{a} + 3\vec{x} = \vec{x} + \vec{b} - \vec{a}$, niin voimme siirtää termejä ja yhdistellä samaa muotoa olevia termejä seuraavasti

$$\begin{aligned} \vec{a} + 3\vec{x} &= \vec{x} + \vec{b} - \vec{a} \\ \Leftrightarrow 3\vec{x} - \vec{x} &= \vec{b} - \vec{a} - \vec{a} \\ \Leftrightarrow 2\vec{x} &= \vec{b} - 2\vec{a} \\ \Leftrightarrow \vec{x} &= \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} \end{aligned}$$

Määritelmä 43 Olkoon $\vec{a}$ ja $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ saman mittaisia vektoreita, ja olkoon $c_1, c_2, \dots, c_n$ reaalityyppisiä lukuja. Jos

$$\vec{a} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n$$

niin sanomme, että vektori $\vec{a}$ on edellä lausuttu u -vektoreiden lineaarikombinaationa. Lukuja $c_1, c_2, \dots, c_n$ sanomme lineaarikombinaation kertoimiksi. Jos ainakin yksi lineaarikombinaation kertoimista on nollasta eroava, sanomme lineaarikombinaation olevan ei-triviaalin.

Lause 44 Jos nollavektori $\vec{0}$ voidaan lausua ei-triviaalina lineaarikombinaationa vektoreista $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, niin jokin u -vektoreista voidaan lausua muiden u -vektoreiden lineaarikombinaationa.

lause12

Todistus: Olkoon

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n = \vec{0}$$

Koska lineaarikombinaatio on ei-triviaali, löytyy kertoimien joukosta nollasta eroavia kertoimia. Olkoon c_k indeksiltään pienin nollasta eroava kerroin. Silloin

$$\vec{u}_k = -\frac{c_{k+1}}{c_k}\vec{u}_{k+1} - \frac{c_{k+2}}{c_k}\vec{u}_{k+2} - \dots - \frac{c_n}{c_k}\vec{u}_n$$

Algoritmi muokkaa kaaviota kierros kierrokselta ja merkitsemme tarvittaessa kaavion järjestysnumeron $k = 1, 2, \dots$ yläindeksinä. (a_{ij}^k) on siis muuttujan x_j kerroin k :nnen

kaavion i :nnessä yhtälössä.)

Koska lopullinen algoritmi sisältää lukuisia poikkeustapausten aiheuttamia varmistuksia ja on siksi kummallisen tuntuinen ensi lukemalta, esitämme ensin erikoistapauksen, jolla saa tuntuman perusratkaisuun.

3.3.1 Algoritmi, Gaussin eliminointi, helppo tapaus.

Seuraava algoritmi olettaa, että muuttujia ja yhtälöitä on sama määrä ($m = n$), ja minään yhtälön LHS:ia ei voida lausua muiden yhtälöiden LHS:ien lineaarikombinaationa. Oletus merkitsee, että yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu ja monet yleisen algoritmin tarkistukset voidaan jättää pois.

g:GaussJordanI

Gaussin algoritmi, versio I helpossa tapauksessa.

- (1) Aseta ensimmäiseen kaavioon tutkittavan yhtälöryhmän kertoimet;
- (2) for $k = 1$ to $n - 1$
- (3) % (Etsitään pivot-alkio)
- (4) if $a_{kk}^k = 0$
- (5) then
- (6) etsi samasta sarakkeesta alemmalta riviltä alkio
- (7) $a_{tk}^k \neq 0, t > k$ ja vaihda rivit w_t ja w_k .
- (8) endif
- (9) % (Tehdään uusi kaavio, pivotoidaan)
- (10) for $j = 1$ to k
- (11) $w_j^{k+1} = w_j^k$;
- (12) endfor
- (13) for $j = k + 1$ to m
- (14) $w_j^{k+1} = w_j^k - (a_{jk}^k / a_{kk}^k) \cdot w_k^k$;
- (15) endfor
- (16) endfor
- (17) (% Palautuvat sijoitukset)
- (18) for $p = n$ downto 1
- (19) $x_p = (b_p^k - \sum_{j=p+1}^n a_{pj}^k x_j) / (a_{pp}^k)$
- (20) endfor

g:GaussJordanII

Gaussin algoritmi, versio II helpossa tapauksessa.

```

(1) Aseta ensimmäiseen kaavioon tutkittavan yhtälöryhmän kertoimet;
(2) for  $k = 1$  to  $n - 1$ 
(3)   % (Etsitään pivot-alkio)
(4)   if  $a_{kk}^k = 0$ 
(5)   then
(6)     etsi samasta sarakkeesta alemmalta riviltä alkio
(7)      $a_{tk}^k \neq 0, t > k$  ja vaihda rivit  $w_t$  ja  $w_k$ .
(8)   endif
(9)   % (Tehdään uusi kaavio, pivotoidaan)
(10)  for  $j = 1$  to  $k - 1$ 
(11)     $w_j^{k+1} = w_j^k - (a_{jk}^k / a_{kk}^k) \cdot w_k^k$ ;
(12)  endfor
(13)   $w_k^{k+1} = w_k^k$ ;
(14)  for  $j = k + 1$  to  $m$ 
(15)     $w_j^{k+1} = w_j^k - (a_{jk}^k / a_{kk}^k) \cdot w_k^k$ ;
(16)  endfor
(17) endfor
(18) (% Muuttujien arvot)
(19) for  $p = 1$  to  $n$ 
(20)    $x_p = b_p^k / a_{pp}^k$ 
(21) endfor

```

Versio II:ssa ei tarvita palautuvia sijoituksia. Sen vuoksi moni pitää toista versiota parempana. Kuitenkin se on herkempi pyöristysvirheille ja versiota I pidetään siksi teoreettisesti parempana.

Esimerkki 45 Olkoon ratkaistavana yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ x - 2y + z = -5 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases} \quad (3.54)$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä kummallakin edellä esitetyllä algoritmilla.

Versio I:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{cc} *1 & *2 \\ \leftarrow - & \\ & \leftarrow - \end{array} \right. \quad (3.55)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -8 & 7 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right| \text{vaihdetaan} \quad (3.56)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -2 & 3 & -3 \\ 0 & (5) & -8 & 7 \\ 0 & 0 & (-2) & -2 \end{array} \right) \quad (3.57)$$

$$z = (-2)/(-2) = 1 \quad (3.58)$$

$$y = (7 - (-8) \cdot 1)/5 = 3 \quad (3.59)$$

$$x = (-3 - (-2) \cdot 3 - 3 \cdot 1)/1 = 0 \quad (3.60)$$

Versio II:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{c} *1 \\ \leftarrow - \\ \leftarrow - \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} *2 \\ \\ \leftarrow - \end{array} \quad (3.61)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -8 & 7 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \text{vaihdetaan} \\ \end{array} \quad (3.62)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -2 & 3 & -3 \\ 0 & [5] & -8 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{c} \leftarrow + \\ *0.4 \end{array} \right. \quad (3.63)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 0 & -0.2 & -0.2 \\ 0 & (5) & -8 & 7 \\ 0 & 0 & [-2] & -2 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{c} \leftarrow \\ -0.1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \leftarrow \\ -4 \end{array} \quad (3.64)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (5) & 0 & 15 \\ 0 & 0 & (-2) & -2 \end{array} \right) \quad (3.65)$$

$$x = 0/1 = 0 \quad (3.66)$$

$$y = 15/5 = 3 \quad (3.67)$$

$$z = (-2)/(-2) = 1 \quad (3.68)$$

Edellä esitetyissä algoritmeissa on vielä yksi merkittävä heikkous. Jos a_{kk} on pieni, mutta nolasta eroava (esim. $a_{kk} = 1.23 \cdot 10^{-10}$ niin version I rivillä (4) ehto on tarkkaan ottaen epätosi, vaikka useimmiten pivot-alkio pitäisi hakea alemmalta riviltä.

Selkein ja helposti ohjelmoitava ratkaisu on hakea itseisarvoltaan suurin kerroin joukosta $\{a_{kk}, a_{(k+1)k}, \dots, a_{nk}\}$. Jos itseisarvoltaan suurin kerroin on a_{qk} rivillä q , niin vaihdetaan rivit w_k ja w_q . Käsin laskettaessa tällainen rivinvaihto on usein tarpeetonta, mutta ohjelmoitaessa algoritmi tietokoneelle, tämä rivinvaihto on ehdottomasti tehtävä versio

III:n mukaisesti.

GaussJordanIII

Gaussin algoritmi, versio III helpossa tapauksessa.

Muuttuneet rivit (verrattuna versioon I) on merkitty tähdellä.

```

(1) Aseta ensimmäiseen kaavioon tutkittavan yhtälöryhmän kertoimet;
(2) for  $k = 1$  to  $n - 1$ 
(3*)   % (Etsitään pivot-rivi)
(4*)    $q = k$ ;
(5*)   for  $i = k + 1$  to  $n$ 
(6*)       if  $|a_{ik}| > |a_{qk}|$ 
(7*)       then
(8*)            $q = i$ ;
(9*)       endif
(10*)  endfor
(11*)  vaihda rivit  $w_k$  ja  $w_q$ 
(12)   % (Tehdään uusi kaavio, pivotoidaan)
(13)   for  $j = 1$  to  $k$ 
(14)        $w_j^{k+1} = w_j^k$ ;
(15)   endfor
(16)   for  $j = k + 1$  to  $m$ 
(17)        $w_j^{k+1} = w_j^k - (a_{jk}^k / a_{kk}^k) \cdot w_k^k$ ;
(18)   endfor
(19) endfor
(20) (% Palautuvat sijoitukset)
(21) for  $p = n$  downto 1
(22)      $x_p = (b_p^k - \sum_{j=p+1}^n a_{pj}^k x_j) / (a_{pp}^k)$ 
(23) endfor

```

Esimerkki 46 Olkoon ratkaistavana yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ x - 2y + z = -5 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases} \quad (3.69)$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä muutetulla algoritmilla.

Versio III:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \leftarrow \text{vaihdetaan} \\ \leftarrow - \end{array} \right. \quad (3.70)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} [2] & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} *0.5 \\ \leftarrow - \\ \leftarrow - \end{array} \right. \quad (3.71)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (2) & 1 & -2 & 1 \\ 0 & [-2.5] & 4 & -3.5 \\ 0 & -2.5 & 2 & -5.5 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} *1 \\ \leftarrow - \end{array} \right. \quad (3.72)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (2) & 1 & -2 & 1 \\ 0 & (-2.5) & 4 & -3.5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \quad (3.73)$$

$$z = (-2)/(-2) = 1 \quad (3.74)$$

$$y = (-3.5 - 4 \cdot 1)/(-2.5) = 3 \quad (3.75)$$

$$x = (1 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1)/2 = 0 \quad (3.76)$$

3.3.2 Algoritmi, Gaussin eliminointi, yleinen tapaus.

Seuraavaksi muotoilemme yleisemmän algoritmin, joka toimii kaikissa tilanteissa. Emme kirjoita täydellistä ohjelmaa, vaan tarkoitus on saada luettava esitys, josta ohjelmointitaitoinen lukija pystyy kirjoittamaan toimivan koodin.

Oletamme, että yhtälöitä on m kappaletta ja muuttujia on n kappaletta. Kun kirjoitamme algoritmin, varaudumme erityisesti seuraaviin erikoistapahtumiin.

- Pivotointi epäonnistuu jossakin sarakkeessa.
- Yhtälöt loppuvat ennen kuin kaikki sarakkeet on pivotoitu.
- Syntyy epätosi yhtälö.
- Syntyy triviaali yhtälö $0 = 0$.

Tulemme algoritmissa joskus vaihtamaan sarakkeiden järjestystä. Jotta syntyvät kaaviot olisivat helposti luettavissa lisäämme kaavioon otsikko-rivin, jolta käy ilmi muuttujia, jonka kertoimista on kysymys. Tämä ei ole oikea-oppista, mutta harjoitteluvai-

heessa tarpeellista. Erityisesti tulemme siirtämään kokonaisia sarakkeita RHS:ään. Siirron jälkeen yhtälöryhmän jokaisen yhtälön oikea puoli ei ole enää reaaliluku, vaan lineaarikombinaatio ykkösestä ja siirretyistä muuttujista. Vastaava kaavion rivin RHS-vektori on tämän lineaarikombinaation kerroinvektori. Käytämme tästä rivin k RHS-vektorista merkintää $\vec{r}_k$. Seuraava esimerkki valaisee asiaa. Esimerkki on käyty läpi sekä yhtälöryhmä- että kaaviomuodossa.

Esimerkki 47

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{rcl} [x] & + & 2y - z = 6 \\ 2x & + & 6y + 4z = 0 \end{array} \right. & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & rhs \\ [1] & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} *2 \\ \leftarrow - \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{rcl} (x) & + & 2y - z = 6 \\ [2y] & + & 6z = -12 \end{array} \right. & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & rhs \\ (1) & 2 & -1 & 6 \\ 0 & [2] & 6 & -12 \end{array} \right) \\ \\ \left\{ \begin{array}{rcl} (x) & + & 2y = 6 + z \\ (2y) & = & -12 - 6z \end{array} \right. & \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} x & y & rhs & z & \\ (1) & 2 & 6 & 1 & \\ 0 & (2) & -12 & -6 & \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} :2 \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{rcl} (x) & + & 2y = 6 + z \\ (y) & = & -6 - 3z \end{array} \right. & \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} x & y & rhs & z & \\ (1) & 2 & 6 & 1 & \\ 0 & (1) & -6 & -3 & \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \leftarrow - \\ *2 \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{rcl} (x) & & = 18 + 7z \\ (y) & = & -6 - 3z \end{array} \right. & \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} x & y & rhs & z & \\ (1) & 0 & 18 & 7 & \\ 0 & (1) & -6 & -3 & \end{array} \right) \end{aligned}$$

Vastaus:

$$\begin{cases} x = 18 + 7z \\ y = -6 - 3z \end{cases}$$

Gaussin algoritmi, versio IV, yleinen tapaus.

- (1) Aseta ensimmäiseen kaavioon tutkittavan yhtälöryhmän kertoimet;
- (2) $k = 1, siirretyt = 0$
- (3) repeat
- (4) % (Etsitään pivot-alkio)
- (5) määritä rivi q siten, että alkio a_{qk}^k on itseisarvoltaan suurin alkioista $\{a_{kk}^k, a_{(k+1)k}^k, \dots, a_{mk}^k\}$
- (6) if $a_{qk}^k = 0$
- (7) then
- (8) siirrä sarake k RHS:iin
- (9) $siirretyt = siirretyt + 1$;

```

(10)     else
(11)         vaida rivit  $w_q$  ja  $w_k$ .
(12)         % (Tehdään uusi kaavio, pivotoidaan)
(13)         for  $j = 1$  to  $k$ 
(14)              $w_j^{k+1} = w_j^k$ ;
(15)         endfor
(16)         for  $j = k + 1$  to  $m$ 
(17)              $w_j^{k+1} = w_j^k - (a_{jk}^k / a_{kk}^k) \cdot w_k^k$ ;
(18)         endfor
(19)          $k = k + 1$ ;
(20)     endif
(21) until  $k > m$  or  $k + \text{siirretyt} > n$ 
(22) % (Onko jäljellä pivotoimattomia sarakkeita?)
(23) if  $k + \text{siirretyt} \leq n$ 
(24) then
(25)     siirrä pivotoimattomat LHS:n sarakkeet RHS:iin
(26) endif
(27) % (Onko jäljellä pivotoimattomia rivejä?)
(28) if  $k \leq m$ 
(29) then
(30)     jos jokin pivotoimattomista yhtälöistä on epätosi,
        niin yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. (LOPETA)
(31) endif
(32) % (Ratkaise LHS:n muuttujien arvot.)
(33) for  $q = k - 1$  downto 1
(34)      $w_q = w_q / a_{qq}$ ;
(35)     for  $i = 1$  to  $q - 1$ 
(36)          $w_i = w_i - a_{iq} w_q$ ;
(37)     endfor
(38) endfor
(39) Tulkitse tulos.

```

3.4 Yhtälöryhmän ratkaiseminen Octavella

Sec:laYROctave

Jokaiselle tulee joskus eteen tilanne, jossa ei ole aikaa tehdä rivioperaatioita käsin, vaan yhtälöryhmä tulee ratkaista nopeasti. Silloin Octave (tai Matlab) on ihanteellinen työkalu.

Kun luet tätä kappaletta, älä tyydy vilkaisemaan ensimmäistä esimerkkiä, vaan lue kaikki esimerkit ja myös kaikki tekstit. Octave (Matlab) on hyvä ja helppo työkalu, mutta sitä helposti käyttää väärin, jos ei tiedä sen erikoista tapaa käsitellä yhtälöryhmää, jolla ei ole ratkaisua.

Esimerkki 48 Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}.$$

Octavella ryhmän voi ratkaista seuraavin komennoin

```
octave:1> A = [-1 2; 1 -1];
octave:2> b = [1; 2];
octave:3> ratk = A\b
ratk =
     5
     3
```

- Huomaa, että vastaus on vektori, jonka ensimmäinen koordinaatti on ensimmäisen muuttujan arvo (x :n arvo) ja toinen koordinaatti on toisen muuttujan arvo (y :n arvo). Muuttujien järjestys määräytyy niiden järjestyksestä yhtälöryhmässä (ensimmäinen muuttuja ensimmäisessä sarakkeessa, toinen muuttuja toisessa sarakkeessa, jne...). Tällä kertaa vastaus on siis: $x = 5, y = 3$.
- Ensimmäinen komentorivi määrittelee yhtälöryhmän kerroinkaavion. Kaavion kertoimet erotetaan välilyönnein ja uuden rivin alkaminen ilmoitetaan puolipisteellä. (Kaaviossa on siis kaksi riviä, kummallakin kaksi kerrointa.) Komento tallettaa kaavion muuttujalle **A**.
- Toinen komentorivi määrittelee yhtälöryhmän RHS:n (Kaksi riviä, kummassakin yksi luku.) Komento tallettaa RHS:n muuttujalle **b**.
- Kolmas komentorivi ei ole laskutoimitus vaan määrää Octaven ratkaisemaan yhtälöryhmän, jonka kerroinkaavio on **A** ja RHS on **b**. Ratkaisu talletetaan muuttujaan **ratk**. Kahden ensimmäisen komennon lopussa on puolipiste. Tämä saa aikaan sen, että Octave suorittaa laskun mykkänä, eikä kaiuta tulosta konsolille. Kolmannen komennon lopussa ei ole puolipistettä, siksi Octave kaiuttaa tuloksen konsolille. Varsinkin alussa on hyvä antaa komennot ilman puolipistettä lopussa. Silloin näkee onko kaavio juuri sellainen kuin halusi. Jos edeltävät komennot annetaan ilman puolipisteitä, niin sessio näyttää seuraavalta:

```
octave:4> A = [-1 2; 1 -1]
A =

    -1     2
     1    -1

octave:5> b = [1; 2]
```

```

b =

    1
    2

octave:6> ratk = A\b
ratk =

    5
    3

```

sim:YROctave02

Esimerkki 49 Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x - y = 2 \\ 3x - y = 0 \end{cases}.$$

On selvää, että tällä yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. Octavella ryhmän ratkaisuyritys näyttää seuraavalta

```

octave:7> A = [-1 2; 1 -1; 3 -1];
octave:8> b = [1; 2; 0];
octave:9> ratk = A\b
ratk =

    0.20000
    0.20000

```

Octave antaa siis vastauksen, joka ei ole yhtälöryhmän ratkaisu. Octaven antama vektori on ns. ”Pienimmän NeliöSumman” ratkaisu. Pienimmän neliösumman menetelmä käsitellään myöhemmin kurssin kuluessa.

Nyt on tärkeintä muistaa, että kun ratkaistaan yhtälöryhmä Octavella, niin tulos tulee aina tarkistaa. Octave antaa aina parhaan mahdollisen ratkaisun. Jos ratkaisun mukaiset arvot sijoitetaan yhtälöryhmään muuttujille ja jonkin yhtälön LHS ja RHS poikkeavat toisistaan enemmän kuin valittu toleranssi ($10^{-15} \dots 10^{-8}$), niin ratkaisua ei ole olemassa.

Tarkista toleranssi

Onneksi tarkistamisenkin voi tehdä Octavella. Tarkistus perustuu matriisitulon laskemiseen. Matriisitulo opetellaan seuraavassa luvussa. Jos A on yhtälöryhmän kerroinkaavio, b on yhtälöryhmän RHS, ja $ratk$ on ratkaisuvektori, niin $A:n$ ja $ratk:n$ matriisitulo on b . Kahden edellisen esimerkin yhtälöryhmien ratkaisemiset tarkistuksineen menevät Octavella siis seuraavasti:

```

octave:1> # Ensimmäinen esimerkki
octave:2> A = [-1 2; 1 -1];
octave:3> b = [1; 2];
octave:4> ratk = A\b
ratk =

    5
    3

octave:5> # tarkistus:
octave:5> A*ratk
ans =

    1
    2

octave:6> # sama kuin b. OK ratkaisu x = 5, y = 3
octave:6> # *****
octave:6> # Toinen esimerkki
octave:6> A = [-1 2; 1 -1; 3 -1];
octave:7> b = [1; 2; 0];
octave:8> ratk = A\b
ratk =

    0.20000
    0.20000

octave:9> # tarkistus:
octave:9> A*ratk
ans =

    0.20000
    0.00000
    0.40000

octave:10> # eri kuin b. Ei ratkaisua.

```

3.5 Homogeeninen yhtälöryhmä

Sec:HomogYR1

Määritelmä 50 (1) Yhtälöryhmän ratkaisu on *triviaali*, jos kaikkien muuttujien arvot ovat ratkaisussa nollia.

(2) Ratkaisu on *ei-triviaali*, jos ainakin yksi muuttuja saa ratkaisussa nollasta eroavan arvon.

Määritelmä 51 *Yhtälöryhmä on homogeeninen, jos sen jokaisen yhtälön RHS on nolla.*

On selvää, että homogeenisella yhtälöryhmällä on aina triviaali ratkaisu. Useimmiten tämä triviaali ratkaisu ei kiinnosta laskijaa. Ainakaan sen löytämiseksi ei kannata nähdä suurta vaivaa. Käytännössä aina, kun tutkimme homogeenista yhtälöryhmää, toivomme löytävämme ei-triviaalin ratkaisun.

Lause 52 *Jos homogeenisella yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu, niin jokin yhtälöryhmän kerroinkaavion sarake voidaan lausua muiden sarakkeiden lineaarikombinaationa.*

Perustelu: Koska homogeenisella yhtälöryhmällä on aina triviaali ratkaisu, lauseen ehto merkitsee sitä, että yhtälöryhmällä on nyt enemmän kuin yksi ratkaisu. Silloin lauseen ^{Th:KaksiRat1}?? mukaan jokin kerroinkaavion sarake voidaan lausua muiden sarakkeiden lineaarikombinaationa. □

Edellisessä lauseessa mainittu yhtälöryhmän ominaisuus: ”jokin kerroinkaavion sarake voidaan lausua muiden sarakkeiden lineaarikombinaationa”, opitaan myöhemmin paljastamaan helpolla determinantilaskulla.

Jo tässä vaiheessa on hyvä todeta eräs ongelma, joka nousee esiin, kun ratkaisemme yhtälöryhmän rivioperaatioilla tai laskemme edellä mainitun helpon determinanttilaskun. Kummassakin tapauksessa laskimemme tai tietokoneemme tekee suuren määrän kerto-, yhteen-, ja vähennyslaskuja. Jakolaskua tehdään vähemmän, mutta sitäkään ei voi välttää. Tämän seurauksena tulokseen kertyy väistämättä pyöristysvirheiden vaikutus. Jos laskutuloksen pitäisi olla tasan 0, mutta pyöristysvirheiden takia se onkin $1.3 \cdot 10^{-14}$, niin se ei silloin ole siis tasan nolla! Tässä kurssimateriaalissa palaamme tähän pyöristysvirheiden ongelmaan muutaman kerran. Emme kuitenkaan käsittele sitä kokonaan.

Numeerisen matematiikan kurssilla asiaa pohditaan lisää. Jos työssäsi myöhemmin joudut ohjelmoimaan ohjelmakoodia, joka ratkaisee yhtälöryhmän niin huomaa, että peruskurssin yksinkertaisin algoritmi-versio ei ole professionaalia tasoa.

Seuraavaksi esitämme kolme esimerkkiä homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisemisesta. Ensimmäinen esimerkki on helppo ja yksinkertainen. Toinen esimerkki tuo esiin tavan käsitellä yhtälöryhmää niin, että voidaan hyödyntää laskinta tai tietokonetta. Kolmas esimerkki tuo esiin vähän mutkikkaamman tilanteen, jonka tyylikäs ratkaisu onnistuu parhaiten puhtaalla Gauss-Jordan algoritmin läpiviennillä.

Esimerkki 53 Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + 7z = 0 \end{cases}.$$

Yhtälöryhmä on homogeeninen. On helppo nähdä, että kerroinkaavion kolmas sarake saadaan, kun toiseen sarakkeeseen lisätään kahdella kerrottuna ensimmäinen sarake ($\vec{a}_{\bullet 3} = \vec{a}_{\bullet 2} + 2 \cdot \vec{a}_{\bullet 1}$.)

Gauss-Jordan algoritmilla

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} *1 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{array} \right| \begin{array}{l} *3 \\ \\ \leftarrow - \end{array} \\ \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 4 & 0 \\ 0 & [5] & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \\ *1 \\ \leftarrow + \end{array} \right| :5 \\ \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 4 & 0 \\ 0 & (1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Muuttujan z sarakkeessa ei pivotoitu, siksi muuttujaa z sisältävät termit siirretään RHS:iin. Tämän jälkeen z :lle annetaan jokin arvo. Jos annamme z :lle arvon $z = 1$, niin saamme yhtälöryhmälle ei-triviaalin ratkaisun. Jos annamme z :lle arvon $z = a$, niin saamme ne kaikki.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -4z \\ y = -z \end{cases} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

Valitaan muuttujalle z arvoksi $z = a$. Sen jälkeen x ja y ratkaistaan yhtälöistä tavalliseen tapaan.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = a \\ y = -a \\ x = -2a \end{cases}$$

Suoraviivainen ratkaisuyritys Octavella jää epätydyttäväksi

```
octave:1> A = [1 2 4; -1 3 1; 3 1 7];
octave:2> b = [0 0 0]';
octave:3> x = A\b
warning: matrix singular to machine precision, rcond =
    9.25186e-18
x =
```

0
0
0

Esimerkki 54 Etsi Octaven avulla ainakin yksi ei-triviaali ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + 7z = 0 \end{cases}.$$

Edellisestä esimerkistä tiedämme, että on olemassa ratkaisuja, joissa kaikki muuttujat saavat nollasta eroavan arvon. Etsimme seuraavassa sen ratkaisun, jossa z saa arvon $z = 1$. Siirretään yhtälöryhmässä jokainen z -termi oikealle ja sijoitetaan z :n paikalle 1. Syntyvä yhtälöryhmä ei ole homogeeninen ja se voidaan helposti ratkaista Octavella

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -4 \cdot 1 \\ -x + 3y = -1 \cdot 1 \\ 3x + y = -7 \cdot 1 \end{cases}$$

```
octave:2> A = [1 2; -1 3; 3 1];
octave:3> b = [-4; -1; -7];
octave:4> ratk = A\b
ratk =

    -2.0000
    -1.0000

octave:5> # tarkistus
octave:5> A*ratk
ans =

    -4.0000
    -1.0000
    -7.0000

octave:6> # oikein! OK, siis z = 1, x = -2, y = -1.
```

HomogYR1_esim1

Esimerkki 55 Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - 2y + z - 2w = 0 \\ 3x + 6y + 2z + w = 0 \\ 2x + 4y + z + w = 0 \end{cases}.$$

Octavella saamme jonkin ratkaisun, mutta emme kaikkia. Siksi teemme täydellisen ratkaisun Gauss-Jordan -algoritmilla. Toinen sarake on ensimmäisen lineaarikombinaatio ($\vec{a}_{\bullet 2} = 2 \cdot \vec{a}_{\bullet 1}$) ja neljäs sarake on ensimmäisen ja kolmannen lineaarikombinaatio ($\vec{a}_{\bullet 4} = \vec{a}_{\bullet 1} - \vec{a}_{\bullet 3}$).

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|c} [1] & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow - \\ \leftarrow - \end{array} \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [2] & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} *1/2 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow - \\ *1 \end{array} \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ z - w = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Muuttujat, joiden sarakeissa ei pivotoitu (y ja w) siirretään RHS:iin ja niille annetaan jotkin sopivat arvot (esim. $y = a$ ja $w = b$. Ainakin toinen ei ole nolla.)

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - w \\ z = w \end{cases} \\
 & \xrightarrow{y=a, w=b} \begin{cases} x = -2a - b \\ y = a \\ z = b \\ w = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Tässä tapauksessa siis homogeenisen yhtälöryhmän kaikki ratkaisut saadaan kahden ratkaisuvektorin lineaarikombinaatioina. On tapana sanoa, että vektorit $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ ja $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ 'virittävät' homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisujoukon.