

4 MATRIISIT JA MATRIISILASKUT

Ch:Matrix

4.1 Matriisi ja matriisilaskut

Sec:MatLaskut

Matriisi on suorakulmainen lukukaavio. Matriiseja ovat esimerkiksi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0.4 & 8 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (x_1 \ x_2 \ x_3) \text{ ja } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Matriiseihin perehtyminen voidaan perustella useilla järkisyillä.

1. Matriisien avulla voidaan suuria lukujoukkoja esittää mahdollisimman pienellä vaivalla ja kokonaisille lukukaavioille voidaan antaa nimiä $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$ jne. Tämä helpottaa suuresti asioiden esittämistä. Eräissä tilanteissa matriisi on hyvin onnistunut ja havainnollinen tapa esittää lukuryhmiä. Esimerkiksi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases}$$

oleelliset osat tiivistyvät matriiseihin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ ja } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

2. Matriiseille voidaan määritellä yhteen- ja kertolasku. Matriiseilla voidaan siis laskea. Näiden laskutoimitusten avulla on kehitetty menetelmiä eräiden matriisien avulla kuvattavien ongelmien ratkaisemiseen. Esimerkkinä mainittakoon yhtälöryhmän ratkaiseminen.
3. Vaikka itse et koskaan harrastaisikaan matriisilaskentaa, niin varmaa on, että tietokoneesi harrastaa. Jos tietokone esimerkiksi ei löydä ratkaisua yhtälöryhmälle se yleensä antaa virheilmoituksen, jossa se kertoo mitä vikaa oli kerroinmatriisissa. Virheilmoituksen ymmärtäminen edellyttää matriisilaskennan perusteiden osaamista.
4. Matematiikassa tarkastellaan struktuureja, jotka muodostuvat olioista ja niille määritellyistä laskutoimituksista. Struktuureja luokitellessa on tapana sanoa, että tietyt ehdot täyttävä struktuuri on ryhmä (tarkemmin luvussa III), tietyt ehdot täyttävä ryhmä on rengas ja tietyt ehdot täyttävä rengas on kunta. Reaaliluvut muodostavat kunnan, ja kompleksiluvut muodostavat kunnan. Opiskelija on

peruskoulussa ja lukiossa harjoitellut laskutoimitusten suorittamista reaalitylukukunnassa. Kun sääntönä voidaan pitää, että reaalitylukuja ja kompleksilukuja lukuunottamatta mikään mielenkiintoinen struktuuri ei ole kunta, saatta peruskoulussa hankittu sujuva laskutaito aiheuttaa kitkaa tutustuttaessa uusiin matemaattisiin struktuureihin. Neliömatriisit muodostavat renkaan mutta eivät kuntaa. Niillä laskettaessa tulee muistaa, että matriisilla ei saa jakaa eikä supistaa (sillä kertolaskun käänteisalkiota ei aina ole olemassa) ja kertolasku ei ole vaihdannainen ($\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$). Tätä kautta matriisilaskenta kehittää teoreettisessa ajattelussa tarvittavaa tarkkuutta ja joustavuutta.

Määritelmä 56 Suorakulmainen lukukaavio, jossa on m vaakariviä ja n pystysaraketta on $m \times n$ -matriisi. Tyypin $m \times 1$ oleva matriisi on pystyvektori ja tyypin $1 \times n$ oleva matriisi on vaakavektori. Kaaviossa esiintyviä lukuja sanomme matriisialkioiksi.

Merkintäsopimuksia:

(1) Tulemme kirjoittamaan lukukaavion aina isojen sulkeiden sisään. On myös luvalista käyttää hakasulkumerkintää, mutta tässä monisteessa käytämme systemaattisesti kaarisulkeita.

(2) Matriisia merkitsemme kirjaimella (iso, vahvennettu ja kursiivi) ja matriisissa olevia alkioita merkitsemme samalla kirjaimella (pieni, vahventamaton ja kursiivi) varustettuna alaindeksein, jotka ilmaisevat millä rivillä ja missä sarakkeessa alkio on. Esimerkiksi a_{12} on matriisin $\mathbf{A}$ rivillä 1 sarakkeessa 2 oleva alkio.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(3) Vaakavektoria merkitään samoin kuin matriisia, mutta usein valitaan pieni kirjain, ja rivi-indeksi voidaan jättää pois. Pystyvektorin tapauksessa sarakeindeksi voidaan jättää pois.

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$

(4) Fysiikassa ja tekniikassa on tapana merkitä vektoreita vahventamattomalla, kursivilla vektorilla, jonka päällä on nuoli.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}, \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$

(5) Tulemme käyttämään kumpaakin merkintää (3 ja 4) vektorille. On tärkeätä, että opiskelija tottuu siihen, että eri tilanteissa käytetään hieman erilaisia merkintöjä.

Määritelmä 57 Usein käytämme matriisille merkintää $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Vastaavasti matriisin $\mathbf{A}$ alkiolle käytetään joskus merkintää $(\mathbf{A})_{ij}$.

Määritelmä 58 (a) Matriisit $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ja $\mathbf{B} = (b_{ij})$ ovat samat (identtiset, engl. equal), jos ne ovat saman kokoiset ja, $a_{ij} = b_{ij}$ kaikilla i, j . Tällöin merkitään $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

(b) Kahden $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ja $\mathbf{B} = (b_{ij})$ summa on matriisi

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$$

(c) Reaaliluvun λ ja $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ tulo $\lambda \mathbf{A}$ on $m \times n$ -matriisi $(\lambda \cdot a_{ij})$. (Kaikki alkiot kerrotaan λ :lla.)

(d) Sovimme lisäksi merkintätavoista

$$\begin{aligned} (-1)\mathbf{A} &= -\mathbf{A}, \\ \mathbf{A} - \mathbf{B} &= \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \end{aligned}$$

Esimerkki 59

$$\begin{aligned} 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Samankokoisten matriisien yhteen- ja vähennyslasku ja vähennyslasku ovat melko selviä asioita. Seuraavaksi määrittelemme matriisin kertomisen matriisilla.

Koulussa olet todennäköisesti oppinut kahden vektorin pistetulon $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$. Kertaamme asian ensin

Määritelmä 60 Kahden samanmittaisen vektorin $\vec{u} = (u_i)$ ja $\vec{v} = (v_i)$ pistetulo on

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Määritelmä 61 $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ja $n \times p$ -matriisin $\mathbf{B} = (b_{jk})$ matriisitulo $\mathbf{AB}$ on $m \times p$ -matriisi

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \vec{a}_{i\bullet} \cdot \vec{b}_{\bullet j}$$

(Siis: $\mathbf{AB}$:n rivillä i sarakkeessa j oleva luku on $\mathbf{A}$:n i :nnen rivin ja $\mathbf{B}$:n j :nnen sarakkeen pistetulo.)

Esimerkki 62 Seuraavassa esimerkissä on lisätty sarakkeita ja rivejä erottavat viivat joihinkin kaavioihin. Tämä ei ole kovin tavallista, mutta tässä tapauksessa saattaa helpottaa kaavion lukemista.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} (2 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (2 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} & (2 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \hline (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} & (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \hline (0 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (0 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} & (0 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} & \frac{2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2)}{1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2)} & \frac{2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3}{1 \cdot 0 + 0 \cdot 3} \\ \hline & & \\ \hline \frac{0 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2)} & \frac{0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2)}{0 \cdot 0 + 3 \cdot 3} & \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

c3s1esim1

Huomaa tyyppien yhteensopivuus $(3 \times 2\text{-matriisi})(2 \times 3\text{-matriisi}) = (3 \times 3\text{-matriisi})!$

Edeltävä määritelmä ja esimerkki kannattaa tiivistää seuraavalla tavalla: ”Kun ollaan laskemassa matriisia $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, niin laskettaessa lukua riville i sarakkeeseen j , tarvitaan ensimmäisestä matriisistä i :s rivi ja toisesta matriisistä j :s sarake. Rivin ja sarakkeen pistetulo antaa alkion tulo-kaavion vastaavaan paikkaan.”

Alla taulukossa (2) (sivu 75) on esitetty edeltävän esimerkin tulokaavion kaikkien alkioiden lasku ja erityisesti ”mistä luvut tulevat?”.

Taulukko 2. Esimerkissä (62) (sivu 74) laskettujen lausekkeiden sisältämien lukujen sijainti alkuperäisissä matriiseissa.

c3s1taulul1

mikä = mitä?	mistä luvut?
$c_{11} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0$	$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{-1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ \boxed{0} & -2 & 3 \end{pmatrix}$
$c_{12} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2)$	$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{-1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 3 \end{pmatrix}$
$c_{13} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3$	$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{-1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{0} \\ 0 & -2 & \boxed{3} \end{pmatrix}$
$c_{21} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ \boxed{0} & -2 & 3 \end{pmatrix}$
$c_{22} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2)$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 3 \end{pmatrix}$
$c_{23} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{0} \\ 0 & -2 & \boxed{3} \end{pmatrix}$
$c_{31} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ \boxed{0} & -2 & 3 \end{pmatrix}$
$c_{32} = 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2)$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 3 \end{pmatrix}$
$c_{33} = 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{0} \\ 0 & -2 & \boxed{3} \end{pmatrix}$

Esimerkki 63 Seuraavassa välimuotoja on vähemmän. Saattoiko saman tuloksen?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1+0 & -1+0+0 \\ 0-2+0 & 0+0+9 \\ 2+1+0 & -1+0+3 \\ 2+0+0 & -1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \\ 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Huomaa taas tyyppien yhteensopivuus $(4 \times 3\text{-matriisi})(3 \times 2\text{-matriisi}) = (4 \times 2\text{-matriisi})!$

Esimerkki 64 *Olkoon*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Laskemalla tulot nähdään, että a) tulo $\mathbf{AB}$ on hyvin määritelty ja laskettavissa, mutta tuloa $\mathbf{BA}$ ei voi laskea. b) Tulot $\mathbf{BC}$ ja $\mathbf{CB}$ voidaan laskea, mutta niistä saadaan eri tulokset. Siis $\mathbf{BC} \neq \mathbf{CB}$.

Esimerkki 65 *Huomaa, että vektoreiden*

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Matriisitulo ja pistetulo ovat tarkasti tulkittuina eri asiat

$$\mathbf{uv} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 28$$

Esimerkki 66 *Luvun alussa esiintyi yhtälöryhmä ja siihen liittyvät matriisit*

$$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ ja } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Matriisikertolaskun määritelmästä ja matriisien yhtäsuuruuden määritelmästä seuraa, että seuraavat kolme riviä sanovat saman asian:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{4.1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases} \tag{4.3}$$

Määritelmä 67 Nollamatriisi $\mathbf{O}$ on matriisi, jonka kaikki alkiot ovat nollia. Jos matriisissa on sarakkeita yhtä monta kuin riviä, se on neliömatrissi. $n \times n$ -neliömatrissin (a_{ij}) päälävistäjä muodostuu alkiosta a_{kk} , $1 < k < n$. Neliömatrissi on diagonaalinen, jos sen ainoat nollasta eroavat alkiot ovat päälävistäjällä. Neliömatrissi $\mathbf{I}$ on yksikkömatrissi, jonka päälävistäjän alkiot ovat ykkösiä ja muut alkiot ovat nollia.

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

Seuraava määritelmä saattaa tuntua keinotekoiselta, mutta määritelmässä esitelty Kroneckerin delta on paljon käytössä teknisessä laskennassa. Asia on ulkoa opettelu arvoisen.

Määritelmä 68 *Kroneckerin delta on*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun } i = j \\ 0, & \text{kun } i \neq j \end{cases}$$

SiiS $\mathbf{I} = (\delta_{ij})$.

Seuraavilla lauseilla on täsmällinen matemaattiseen käsitteistöön liittyvä merkitys, johon palataan opetuksessa myöhemmin. Lauseet (69) ja (70) luettelevat matriiseille voimassa olevia tavallisesta laskemisesta tuttuja ominaisuuksia. Esimerkki (71) kertoo missä suhteessa matriiseilla laskeminen poikkeaa reaaliluvuilla laskemisesta. (Tässä vaiheessa on tärkeätä muistaa esimerkin (71) antama viesti.) Lauseet on koottu peräkkäin, jotta kaavat olisivat helposti silmäiltävissä. Todistukset on esitetty esimerkin jälkeen. Seuraavassa merkinnät $+_m$ ja $\cdot_m$ tarkoittavat matriisien laskutoimituksia.

h ominaisuuudet

Lause 69 Olkoon $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ $m \times n$ -matriiseja ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ reaalilukuja. Silloin

- (1) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
- (2) $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$
- (3) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$
- (4) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- (5) $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$
- (6) $\alpha(\beta \mathbf{A}) = (\alpha\beta) \mathbf{A}$
- (7) $(\alpha + \beta) \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{A}$
- (8) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}$

Kommentteja: (1) $+_m$ on liitännäinen (eli assosiatiivinen), (2) nollamatriisi on $+_m$:n neutraalialkio, (3) $-\mathbf{A}$ on $\mathbf{A}$:n käänteisalkio, (4) $+_m$ on vaihdannainen (eli kommutatiivinen)

n ominaisuuudet

Lause 70 Olkoon $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ matriiseja ja $\alpha \in \mathbb{R}$ reaalityyppi. Jos matriisien tyypit ovat sellaiset, että seuraavat tulot ovat olemassa, niin silloin

- (1) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- (2) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- (3) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
- (4) $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$
- (5) $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$

Kommentteja: (1) $\cdot_m$ on liitännäinen (assosiatiivinen), (2,3) $+_m$ ja $\cdot_m$ noudattavat osittelulakeja, (5) $\mathbf{I}$ on matriisikertolaskun $\cdot_m$ neutraalialkio.

kussa on outoa

Esimerkki 71 Olkoon $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ matriiseja. Jos matriisien tyypit ovat sellaiset, että seuraavat tulot ovat olemassa, niin on mahdollista, että

- (1) $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$
- (2) $(\mathbf{AC} = \mathbf{BC})$ vaikka $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$
- (3) $(\mathbf{AB} = \mathbf{O})$ vaikka $(\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ ja $\mathbf{B} \neq \mathbf{O})$

Lauseiden (69) ja (70) osalta todistamme vain muutaman kohdan ja esimerkin (71) väitteet osoitetaan oikeiksi antamalla esimerkki jokaiseen kohtaan.

Todistuksia: (Lause (69) väite (I))

$$\begin{aligned} \forall i, j: \quad (\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}))_{ij} &= a_{ij} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} + c_{ij} = ((\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C})_{ij} \end{aligned}$$

(Lause (70) väite (I)) Olkoot $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ tyyppisiä $m \times n$, $n \times p$ ja $p \times r$ olevia matriiseja. Silloin matriisit $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ ja $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ ovat kumpikin tyyppiä $m \times r$ ja

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \text{ ja } (\mathbf{BC})_{st} = \sum_{q=1}^p a_{sq}b_{qt}$$

joten

$$\begin{aligned}
 ((\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C})_{ij} &= \sum_{q=1}^p (\mathbf{A}\mathbf{B})_{iq} c_{qj} = \sum_{q=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kq} \right) c_{qj} \\
 &= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1})c_{1j} \\
 &\quad + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \cdots + a_{in}b_{n2})c_{2j} \\
 &\quad + \cdots \\
 &\quad + (a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{2p} + \cdots + a_{in}b_{np})c_{pj} \\
 &= a_{i1}(b_{11}c_{1j} + b_{12}c_{2j} + \cdots + b_{1p}c_{pj}) \\
 &\quad + a_{i2}(b_{21}c_{1j} + b_{22}c_{2j} + \cdots + b_{2p}c_{pj}) \\
 &\quad + \cdots \\
 &\quad + a_{in}(b_{n1}c_{1j} + b_{n2}c_{2j} + \cdots + b_{np}c_{pj}) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{q=1}^p b_{kq} c_{qj} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} (\mathbf{B}\mathbf{C})_{kj} \\
 &= (\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}))_{ij}
 \end{aligned}$$

(Lause 70) väite (2)) th_matkerto:kertolaskun ominaisuudet

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}))_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} (\mathbf{B} + \mathbf{C})_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) \\
 &= a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) + \cdots + a_{in}(b_{nj} + c_{nj}) \\
 &= (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}) + (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{in}c_{nj}) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} = (\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C})_{ij}
 \end{aligned}$$

(Lause 70) väite (5)) th_matkerto:kertolaskun ominaisuudet
 Tutkitaan $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $m \times m$ -yksikkömatriisin $\mathbf{I} = (\delta_{ij})$ ja $n \times n$ -yksikkömatriisin $\mathbf{J} = (\delta_{ij})$ tuloja.

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{I}\mathbf{A})_{ij} &= \sum_{k=1}^m \delta_{ik} a_{kj} = \delta_{i1}a_{1j} + \delta_{i2}a_{2j} + \cdots + \delta_{im}a_{mj} = a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij} \\
 (\mathbf{A}\mathbf{J})_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{kj} = a_{i1}\delta_{1j} + a_{i2}\delta_{2j} + \cdots + a_{in}\delta_{nj} = a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}
 \end{aligned}$$

(Esimerkki 71) Olkoon c3s1esim2:mik\IeC {\\"a} matlaskussa on outoa

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Silloin suora lasku osoittaa, että:

- (1) $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$,
- (2) $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$, vaikka $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$,
- (3) $\mathbf{DE} = \mathbf{O}$, vaikka $\mathbf{D} \neq \mathbf{O}$ ja $\mathbf{E} \neq \mathbf{O}$.

4.2 Transponointi

sec:MatTransp

Seuraavassa määriteltävää transpoosimerkintää käytetään paljon. Vaikka asia on yksinkertainen, sen pitää tulla täydellisen tutuksi.

Määritelmä 72 $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ transponoitu matriisi eli transpoosi on $n \times m$ -matriisi $\mathbf{A}^T$ jolle

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = a_{ji}.$$

(Matriisi $\mathbf{A}^T$ saadaan siis $\mathbf{A}$:sta vaihtamalla vaakarivit pystysarakkeiksi.)

Esimerkki 73

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(Huomaa: vasen ylänurkka pysyy paikallaan, ensimmäisestä rivistä tulee ensimmäinen sarake, toisesta rivistä tulee toinen sarake, ...)

Lause 74 Jos matriisien $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ väliset laskutoimitukset ovat määriteltyjä ja $\lambda \in \mathbb{R}$, niin

- (1) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
- (2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
- (3) $(\lambda \mathbf{A})^T = \lambda \mathbf{A}^T$
- (4) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad \ll \text{TÄRKEÄ!}$

Todistus: Kohdat (1) - (3) nähdään välittömästi. (4):

$$((\mathbf{AB})^T)_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{B}^T)_{ik}(\mathbf{A}^T)_{kj} = (\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)_{ij}$$

Esimerkki 75 Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ ja } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Lasketaan ensin väitteen (4) mukaiset lausekkeet

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})^T &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Seuraavaksi kirjaamme uudelleen samat laskut, mutta nyt merkitsemme erityisesti mistä tulevat ne luvut joista laskemme tulomatriisin rivillä yksi sarakkeessa kaksi olevan alkion 43.

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})^T &= \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{5} & 6 \\ \boxed{7} & 8 \end{pmatrix} \right) \right)^T = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ \boxed{43} & 50 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 19 & \boxed{43} \\ 22 & 50 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} \boxed{5} & \boxed{7} \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} \\ 2 & \boxed{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & \boxed{43} \\ 22 & 50 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Määritelmä 76 Neliömatriisi $\mathbf{A}$ on symmetrinen, jos $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ (eli $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$) ja antisymmetrinen, jos $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ (eli $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$)

Jokainen matriisi voidaan esittää symmetrisen ja antisymmetrisen matriisin summana

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^- \quad \text{missä}$$

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \text{ on symmetrinen, ja}$$

$$\mathbf{A}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \text{ on antisymmetrinen.}$$

Jos esimerkiksi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{niin}$$

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^- = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ja}$$

$$\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^- = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

4.3 Käänteismatriisi

Sec:MatInv

Reaalilukujen tapauksessa luvun a käänteisluku a^{-1} on sellainen luku, että $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$ (missä 1 = kertolaskun neutraalialkio). Matriisin käänteismatriisilta vaaditaan täsmälleen sama ominaisuus. Asioita mutkistaa se, että kaikilla $\mathbf{O}$:sta poikkeavilla matriiseilla ei ole käänteismatriisia.

Määritelmä 77 Neliömatriisi $\mathbf{A}$ on säännöllinen, jos on olemassa käänteismatriisi $\mathbf{A}^{-1}$ siten, että $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

sikäisitteisyys

Lause 78 Jos neliömatriisi $\mathbf{A}$ on säännöllinen, niin

- (1) käänteismatriisi $\mathbf{A}^{-1}$ on yksikäsitteinen ja
- (2) matriisiyhtälöllä $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu $\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$.

Todistus: Todistus perustuu käänteismatriisin määritelmään, matriisikertolaskun liitännäisyyteen ja matriisilaskujen osittelulakeihin (lause (70)(1,2)). th matkerto:kertolaskun ominaisuudet

(1) Olkoot $\mathbf{V}$ ja $\mathbf{W}$ kaksi $\mathbf{A}$:n käänteismatriisia. Silloin

$$\mathbf{V} = \mathbf{VI} = \mathbf{V}(\mathbf{AW}) = (\mathbf{VA})\mathbf{W} = \mathbf{IW} = \mathbf{W}$$

(2) $\mathbf{A}^{-1}\vec{b}$ on matriisiyhtälön $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ ratkaisu, sillä

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\vec{b}) = (\mathbf{AA}^{-1})\vec{b} = \vec{b}$$

Olkoot $\vec{v}$ ja $\vec{w}$ kaksi matriisiyhtälön $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ ratkaisua. Silloin

$$\begin{aligned} \vec{v} - \vec{w} &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}(\vec{v} - \vec{w})) = \mathbf{A}^{-1}(\vec{b} - \vec{b}) = \mathbf{A}^{-1}\vec{0} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{v} &= \vec{w} \end{aligned}$$

□

Edellisen lauseen väite (2) merkitsee sitä, että kun yhtälöryhmässä on yhtä monta yhtälöä kuin muuttujaa, niin ratkaisu saadaan helposti, jos kerroinmatriisin käänteismatriisi on tiedossa. Tulemme seuraavassa kappaleessa esittelemään keinon, jolla käänteismatriisi saadaan määritettyä. Myöhemmin tässä luvussa esitämme samaan tarkoitukseen vielä toisen keinon.

Kysymys siitä, milloin neliömatriisi on säännöllinen saa seuraavissa kapaleissa yksinkertaisen vastauksen. Seuraavassa luvussa yleistämme säännöllisyyden käsitteen matriiseille, joilla on rivejä enemmän kuin sarakkeita. Yleistys auttaa käsittelemään yhtälöryhmiä, joissa on yhtälöitä enemmän kuin muuttujia.

Kaikesta edellä sanotusta voimme todeta, että olemme nyt saavuttaneet erään tämän kurssin ydin-asian: ”matriisin säännöllisyys ja käänteismatriisin määrittäminen”.

Esimerkki 79 Tarkastellaan esimerkkinä lauseen ^{th_c3s3a:kmatr_yksikasitteisyys} (178) väitteseen (2) yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ -2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kerroinmatriisi ja sen käänteismatriisi ovat

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

sillä

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lauseen mukaan yhtälöryhmän ratkaisu saadaan kaavalla

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sijoittamalla alkuperäisen yhtälöryhmään huomaa, että ratkaisu on oikea.

Seuraavaksi listaamme joukon käänteismatriisin ominaisuuksia.

Lause 80 Olkoot $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ säännöllisiä $n \times n$ -matriiseja. Silloin myös $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}^T$ ja $\mathbf{AB}$ ovat säännöllisiä ja

- (1) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- (2) $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}$
- (3) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ «« TÄRKEÄ!
- (4) $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

Todistus:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{cases} (\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{A}) = \mathbf{I} \\ (\mathbf{A})(\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I} \end{cases} \\
 (2) \quad & \begin{cases} (\lambda \mathbf{A})(\lambda^{-1} \mathbf{A}^{-1}) = \lambda \cdot \lambda^{-1} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \\ (\lambda^{-1} \mathbf{A}^{-1})(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^{-1} \cdot \lambda \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I} \end{cases} \\
 (3) \quad & \begin{cases} (\mathbf{A}\mathbf{B})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \\ (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I} \end{cases} \\
 (3) \quad & \begin{cases} (\mathbf{A}^T)(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{I} \\ (\mathbf{A}^{-1})^T(\mathbf{A}^T) = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{I} \end{cases}
 \end{aligned}$$

□

Lause 81 Jos matriisi $\mathbf{A}$ on säännöllinen, niin

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (\mathbf{AB} = \mathbf{AC}) \Rightarrow (\mathbf{B} = \mathbf{C}) \\
 (2) \quad & (\mathbf{BA} = \mathbf{CA}) \Rightarrow (\mathbf{B} = \mathbf{C}) \\
 (3) \quad & (\mathbf{AB} = \mathbf{O}) \Rightarrow (\mathbf{B} = \mathbf{O}) \\
 (4) \quad & (\mathbf{BA} = \mathbf{O}) \Rightarrow (\mathbf{B} = \mathbf{O})
 \end{aligned}$$

Todistus: (1) $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AC} = \mathbf{C}$, (2) vastaavasti ja (3) seuraa (1):stä, kun $\mathbf{C} = \mathbf{O}$. (4) vastaavasti. □

Siis esimerkiksi (71) sivulla 78 mainitut ongelmat (2) ja (3) eivät koske säännöllisiä neliömatriiseja. Esimerkin (71) yhteydessä on tapana sanoa, että ”matriisilla ei saa jakaa, mutta käänteismatriisilla saa kertoa (jos käänteismatriisi on olemassa).”

4.4 Matriisit ja vektorit Octavessa (kesken)

Sec:MVOct

Kappale
kesken

Octavea on jo käytetty lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemisessa. Nyt käytämme samaa ohjelmaa matriisi- ja vektori-laskujen laskemiseen.

Matriisi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

voidaan esitellä Octavelle kahdella tavalla:

Tapa 1:

```
octave:2> A = [2 -4; 1 3]
A =

     2    -4
     1     3
```

Muuttujalle A sijoitetaan matriisi. Matriisimerkintä alkaa (alku)hahasululla ja päättyy (loppu)hahasulkuun. Matriisin alkiot luetellaan välilyönnein (tai pilkuin) erotettuina ja rivit erotetaan puolipisteellä. Jos komento päättyy puolipisteeseen, niin Octave ei kaiuta matriisia näytölle, ja jos puolipiste puuttuu komennon perästä, niin Octave nielaisee komenon kaiuttamatta mitään. (Kokeile.) Kummassakin tapauksessa muuttuja A viittaa komennon jälkeen siihen edellä sijoitettuun matriisiin.

Tapa 2:

```
octave:3> A = [2 -4;
>              1  3]
A =

     2    -4
     1     3
```

Toisessa tavassa matriisi kirjoitetaan rivi kerrallaan. Octave-tulkki tulkitsee ensimmäisen komentorivin tarkoittavan matriisin määrittelyä, mutta toteaa komennon olevan vielä kesken, ja odottaa seuraavan rivin täydentävän komennon. Rivejä voi olla enemmänkin kuin kaksi. Komento tulee valmiiksi, kun loppu-hahasulku lopettaa matriisin.

4.5 Esimerkki Markovin ketjusta, 'FlyBike'

Sec:FlyBike

laFlyBike

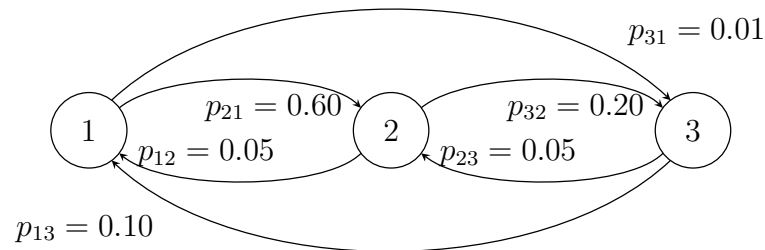
Esimerkki 82 *Suomalainen 'FlyBike'-talli ottaa vuosittain osaa Trans-Silvanian ympäriajojoon kymmenellä pyöräilijällä. Tallin manageri haluaa arvion tulevien vuosien tuotoista taloussuunnittelua varten. Manageri luokittelee tallinsa urheilijat kolmeen ryhmään "aloittelijat", "kokeneet" ja "tähdet". Talli tekee yhdessä jokaisen urheilijan kanssa mainos ja pr-sopimuksen. Keskimääräiset tallin tuotot eri ryhmissä ovat seuraavan taulukon mukaiset. Talukossa on myös eri ryhmiin kuuluvien urheilijoiden lukumäärät tällä kaudella.*

ryhmä	tuotto	lkm nyt
(1) aloittelijat	$r_1 = 300$	$n_1 = 6$
(2) kokeneet	$r_2 = 2000$	$n_2 = 3$
(3) tähdet	$r_3 = 10000$	$n_3 = 1$

Muodostetaan taulukon sarakkeista vektorit $\vec{r} = (300, 2000, 10000)^T$ ja $\vec{n} = (6, 3, 1)^T$. Tallin tämän kauden tuotto on

$$R_0 = \vec{n} \cdot \vec{r} = 6 \cdot 300 + 3 \cdot 2000 + 1 \cdot 10000 = 17800.$$

Tallin harjoitusohjelma sekä valmennus- ja huoltotuki takaa sen, että urheilijat kehittyvät uransa aikana. Siirtymätodennäköisyydet urheilijan siirtymiselle ryhmästä toiseen yhden kauden kuluessa ovat seuraavat:



Tee managerille arvio lähikausien tuotoista.

Ratkaisu:

Kaaviossa kirjaimella p_{ij} merkitään todennäköisyyttä sille, että tällä kaudella ryhmässä j polkeva urheilija, kilpailee seuraavalla kaudella ryhmässä i . Siirtymät $(1 \rightarrow 2)$ ja $(2 \rightarrow 3)$ ovat luonnollisia valmennuksesta seuraavaa urakehitystä. Siirtymät $(2 \rightarrow 1)$, $(3 \rightarrow 2)$ ja $(3 \rightarrow 1)$ ovat joko loukkaantumisesta johtuvia taantumia, tai seurausta siitä, että kokenut urheilija tai tähti lopettaa uransa ja hänet korvataan kokemattomammalla.

Saattaa tuntua oudolta, että siirtymään $(1 \rightarrow 2)$ liitetään siirtymätodennäköisyys p_{21} . Tuntuu kuin indeksit olisivat väärinpäin. Pian huomaat, että indeksit kannattaa merkitä juuri näin!

p_{kk} on todennäköisyys sille, että urheilija joka on nyt ryhmässä k , jatkaa seuraavankin kauden samassa ryhmässä. Alkeistodennäköisyyksien summa on yksi, joten

$$p_{11} = 1 - p_{21} - p_{31} = 1 - 0.60 - 0.01 = 0.39$$

$$p_{22} = 1 - p_{12} - p_{32} = 1 - 0.05 - 0.20 = 0.75$$

$$p_{33} = 1 - p_{13} - p_{23} = 1 - 0.10 - 0.05 = 0.85$$

Tiedämme siis urheilijoiden lukumäärät eri ryhmissä nyt ($\vec{n}(0)$) sekä siirtymätodennäköisyydet. Näiden avulla voimme laskea odotusarvot urheilijoiden lukumäärille eri ryhmissä ensi kaudella ($\vec{n}(1)$) kaavoilla

$$n_1(1) = p_{11}n_1(0) + p_{12}n_2(0) + p_{13}n_3(0)$$

$$n_2(1) = p_{21}n_1(0) + p_{22}n_2(0) + p_{23}n_3(0)$$

$$n_3(1) = p_{31}n_1(0) + p_{32}n_2(0) + p_{33}n_3(0)$$

eli

$$\vec{n}(1) = \mathbf{P}\vec{n}(0),$$

missä $\mathbf{P}$ on matriisi

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.39 & 0.05 & 0.10 \\ 0.60 & 0.75 & 0.05 \\ 0.01 & 0.20 & 0.85 \end{pmatrix}.$$

Odotusarvo k :nnen kauden ryhmien suuruuksille on

$$\vec{n}(k) = \mathbf{P}\vec{n}(k-1) = \mathbf{P}^k\vec{n}(0).$$

Teemme pienen python-ohjelman nähdäksemme seuraavan kymmenen kauden odotusarvot. Kirjoitamme seuraavat komentorivit tekstitiedostoon "laFlyBike.py":

```
from numpy import *
P = matrix([[0.39, 0.10, 0.20],
            [0.60, 0.75, 0.10],
            [0.01, 0.10, 0.85]],float);
n = matrix([[6],[3],[1]],float)
#
print('\n k    n1(k)    n2(k)    n3(k)')
for k in range(11):
    nk = (P**k)*n
    print('{0:3d}    {1:5.3f}    {2:5.3f}    {3:5.3f}'.format(
        k, nk[0,0], nk[1,0], nk[2,0]))
```

Komento 'python laFlyBike.py' tuottaa tulosteen:

k	n1 (k)	n2 (k)	n3 (k)
0	6.000	3.000	1.000
1	2.840	5.950	1.210
2	1.945	6.287	1.652
3	1.718	6.048	2.052
4	1.685	5.771	2.366
5	1.708	5.576	2.605
6	1.745	5.467	2.789
7	1.785	5.426	2.935
8	1.826	5.434	3.055
9	1.867	5.477	3.159
10	1.907	5.543	3.251

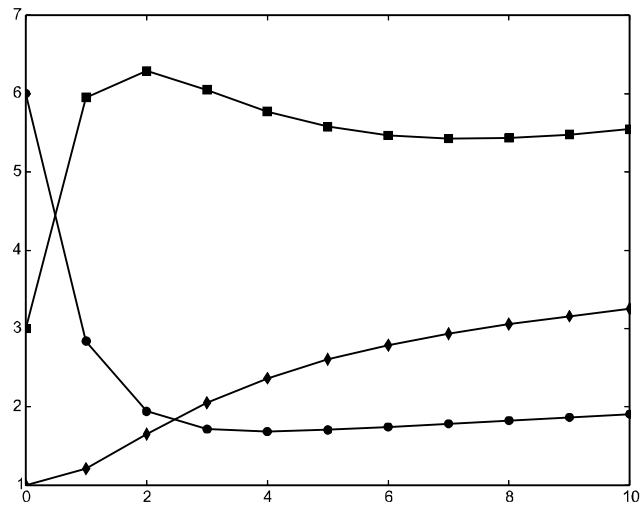
Pythonilla saamme myös helposti graafisen esityksen eri ryhmien kokojen kehitykselle. Tiedostoon "laFlyBike2.py" kirjoitamme ohjelman:

```
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt
#
P = matrix([[0.39, 0.10, 0.20],
            [0.60, 0.75, 0.10],
            [0.01, 0.10, 0.85]],float);
n = matrix([[6],[3],[1]],float)
#
x = zeros((11,1));
n1 = zeros((11,1));
n2 = zeros((11,1));
n3 = zeros((11,1));
for k in range(11):
    nk = (P**k)*n;
    n1[k] = nk[0];
    n2[k] = nk[1];
    n3[k] = nk[2];
    x[k] =k;
#
plt.plot(x,n1,'k-o',x,n2,'k-s',x,n3,'k-d');
plt.show()
```

Ohjelman piirtämä graafi on kuvassa [LAPc3s1fig1](#) 22.

Jos mallin siirtymätodennäköisyydet on arvioitu oikein ja ne eivät myöskään muutu tulevien kausien aikana, niin joukkueen urheilijoista tulee keskimäärin kokeneempia ja heidän tulonsakin keskimäärin kasvavat. Tallin tulot ovat siis kasvussa, mutta miten paljon?

Lisätään vielä samaan kuvaan tallin saama tulo kausittain. Piirrämme kaksi erillistä



LAPc3s1fig1

Kuva 22. Ryhmien koko tulevina kausina.

koordinaatistoa samaan kuvaan ja lisäämme joitakin otsikkotekstejä. Seuraavassa tiedosto ”laFlyBike3.py” ja sen piirtämä kuva:

```
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt
#
P = matrix([[0.39, 0.10, 0.20],[0.60, 0.75, 0.10],[0.01,
0.10, 0.85]],float);
r = matrix([[300,2000,10000]]);
n = matrix([[6],[3],[1]],float)
#
x = zeros((11,1));
n1 = zeros((11,1));
n2 = zeros((11,1));
n3 = zeros((11,1));
tulo = zeros((11,1));
#
for k in range(11):
    nk = (P**k)*n;
    n1[k] = nk[0];
    n2[k] = nk[1];
    n3[k] = nk[2];
    x[k] =k;
    tulo[k] = r*nk;
#
fig = plt.figure();

kuval = fig.add_subplot(211);
```

```

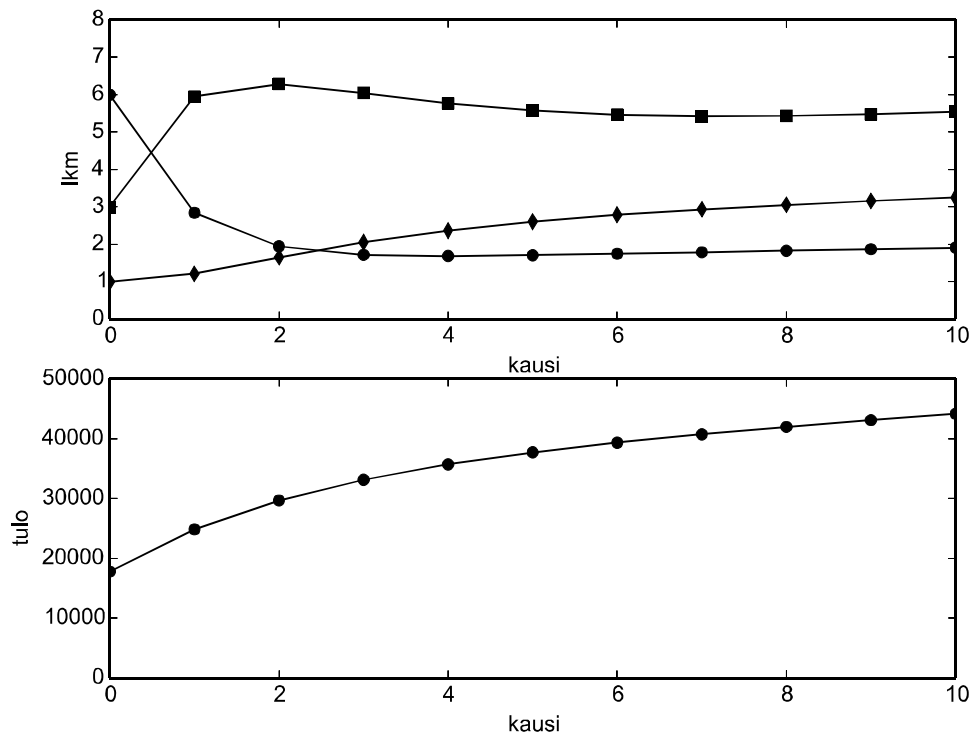
kuva1.plot(x,n1,'k-o',x,n2,'k-s',x,n3,'k-d');
kuva1.set_xlabel('kausi');
kuva1.set_ylabel('lkm');
kuva1.axis([0,10,0,8]);

kuva2 = fig.add_subplot(212);
kuva2.plot(x,tulo,'k-o');
kuva2.set_xlabel('kausi');
kuva2.set_ylabel('tulo');
kuva2.axis([0,10,0,50000]);

plt.show()

```

Ohjelman piirtämä graafi on kuvassa [LAPc3s1fig2](#) 23.



Kuva 23. Ryhmien koko ja tallin tulo tulevina kausina.

4.6 Matriisin kääntäminen rivioperaatioilla

InvGaussJordan

Seuraavassa esitetty Gaussin algoritmi perustuu tuttuihin rivioperaatioihin. Teoria on esitetty mahdollisimman lyhyesti ja esimerkit saavat selvittää asian. Algoritmi esite-

tään vasta lopuksi, koska se tiivistää esimerkit.

Olkoon $\mathbf{A}$ seuraavassa $n \times n$ -matriisi. Rivioperaatiot voidaan muuntaa matriisilla (rivioperaattorilla) kertomiseksi seuraavalla tavalla:

1) kahden rivin vaihto

Kun matriisi $\mathbf{A}$ kerrotaan matriisilla (rivioperaattorilla)

$$\mathbf{E}_{p;q}^{\text{vaihda}} = (e_{ij}), \text{ missä } \begin{cases} e_{pq} = e_{qp} = 1 \\ e_{ii} = 1, \text{ kun } i \neq p \text{ ja } i \neq q \\ e_{ij} = 0, \text{ muulloin} \end{cases},$$

niin rivit p ja q vaihtavat paikkaa.

Esim:

$$\mathbf{E}_{1;2}^{\text{vaihda}} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 23 \\ 11 & 12 & 13 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}$$

2) rivin kertominen luvulla λ

Kun matriisi $\mathbf{A}$ kerrotaan matriisilla (rivioperaattorilla)

$$\mathbf{E}_{p;\lambda}^{\text{kerro}} = (e_{ij}), \text{ missä } \begin{cases} e_{pp} = \lambda \\ e_{ii} = 1, \text{ kun } i \neq p \\ e_{ij} = 0, \text{ muulloin} \end{cases},$$

niin rivi p tulee kerrotuksi luvulla λ .

Esim:

$$\mathbf{E}_{2;10}^{\text{kerro}} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 210 & 220 & 230 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}$$

3) rivin p lisääminen luvulla λ kerrottuna riviin q

Kun matriisi $\mathbf{A}$ kerrotaan matriisilla (rivioperaattorilla)

$$\mathbf{E}_{p,q;\lambda}^{\text{lisaa}} = (e_{ij}), \text{ missä } \begin{cases} e_{ii} = 1, \forall i \\ e_{qp} = \lambda \\ e_{ij} = 0, \text{ muulloin} \end{cases},$$

niin rivi p tulee lisätyksi luvulla λ kerrottuna riviin q .

Esim:

$$\mathbf{E}_{1,2;100}^{\text{lisaa}} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 1121 & 1222 & 1323 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}$$

Kaikki edellä esiintyneet rivioperaattorit ovat säännöllisiä sillä helposti nähdään että

$$\left(\mathbf{E}_{p,q}^{\text{vaihto}}\right)^{-1} = \mathbf{E}_{p,q}^{\text{vaihto}}, \quad \left(\mathbf{E}_{p;\lambda}^{\text{kerro}}\right)^{-1} = \mathbf{E}_{p;1/\lambda}^{\text{kerro}} \quad \text{ja} \quad \left(\mathbf{E}_{p,q;\lambda}^{\text{lisaa}}\right)^{-1} = \mathbf{E}_{p,q;-\lambda}^{\text{lisaa}},$$

Lause 83 Olkoon $\mathbf{A}$ säännöllinen $n \times n$ -matriisi. Jos on olemassa $n \times n$ -matriisi $\mathbf{B}$, jolle $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, niin $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$.

Todistus: $\mathbf{AB} = \mathbf{ABAA}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{I}$ □

Lause 84 Olkoon $\mathbf{A}$ säännöllinen $n \times n$ -matriisi. Jos $\mathbf{A}$ voidaan muuttaa jonolla rivioperaatioita yksikkömatriisiksi $\mathbf{I}$, niin kääntematriisi $\mathbf{A}^{-1}$ saadaan tekemällä samat rivioperaatiot yksikkömatriisille $\mathbf{I}$.

Todistus: Olkoon $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ jono rivioperaattoreita siten, että $\mathbf{E}_n \cdots \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I}$. Silloin edellisen lauseen mukaan

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n \cdots \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_n \cdots \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{I}$$

□

Esimerkki 85 Määritetään kääntematriisi matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kirjoitetaan ensin kaavio $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$, jolle ryhdymme tekemään rivioperaatioita. Tällä var-

mistamme, että $\mathbf{I}$:hin kohdistuu täsmälleen samat rivioperaatiot kuin $\mathbf{A}$:han.

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{A}|\mathbf{I}) \\
 & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} [1] & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -8 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} +1 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\
 & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & [2] & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ -1 \\ \leftarrow \end{array} \\
 & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & (2) & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & 4 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ -2 \end{array} \\
 & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 0 & 0 & 16 & 7 & 4 \\ 0 & (2) & 0 & -7 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & [1] & 4 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ :2 \\ \end{array} \\
 & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 16 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -7/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array} \right) \\
 & \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & 7 & 4 \\ -7/2 & -3/2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Tarkistus

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 7 & 4 \\ -7/2 & -3/2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 16 & 7 & 4 \\ -7/2 & -3/2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Esimerkki 86 Määritetään käänteismatriisi matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{A}|\mathbf{I}) \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} [1] & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} +1 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} +2 \\ \\ \leftarrow \end{array} \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & [2] & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ +1/2 \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} \\ +3/2 \\ \leftarrow \end{array} \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 0 & -1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & (2) & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & [0] & 7/2 & 3/2 & 1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Viimeinen pivotointi epäonnistuu, jonka tulkitsemme merkiksi siitä, että matriisilla ei ole käänteismatriisia.

Edellä kuvattu menetelmä johtaa helposti hankaliin murtolukulaskuihin, mutta se on erittäin suoraviivainen ja sellaisena helppo omaksua.

Gaussin algoritmi (käänteismatriisin määrittämiseksi):

- (0) Aseta $k = 1$, $\mathbf{B}(1) = (\mathbf{A}|\mathbf{I})$.
- (1) Otetaan tukialkioksi (pivot element) alkio $b(k)_{kk}$.
- (2) Jos tukialkio on 0 ja tukialkion sarakkeessa tukialkion alapuolella on nollasta poikkeava alkio $b(k)_{rk}$, $r > k$, vaihdetaan rivit r ja k keskenään. Jos tukialkio on 0 ja sen alapuolelta ei löydy nollasta poikkeavaa alkiota, lopetetaan ja todetaan ettei käänteismatriisia ole olemassa.
- (3) Jaetaan tukialkion rivi tukialkiolla. (Eli tehdään tukialkio 1:ksi.)
- (4) Lisätään tukialkion rivi muihin riveihin sopivalla luvulla kerrottuna siten, että tukialkion ylä- ja alapuolella olevat alkion muuttuvat nolliksi.
- (5) Jos $k < n$, niin kasvatetaan k :ta yhdellä ja siirrytään kohtaan (1).
- (6) $\mathbf{A}^{-1}$ on saadun $n \times 2n$ -matriisin $\mathbf{B}(k)$ oikea puolikas.

4.7 Yhtälöryhmän ratkaisun herkkyyys

Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 5 \\ -2x + 2y + 2z = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=\vec{x}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}_1}$$

ratkaisu on

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jos jonkun yhtälön RHS muuttuu, niin myös ratkaisu muuttuu.

Jos kolmannen yhtälön RHS kasvaa arvosta 4 arvoon 5, niin yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu. Uusi ratkaisu on

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 5 \\ -2x + 2y + 2z = 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=\vec{x}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}_2}$$

ratkaisu on

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 2 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

Muutos ratkaisussa on

$$\Delta \vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 2 \\ 0.75 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.75 \\ 1 \\ -1.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Kun siis yhdenkin yhtälön RHS muuttui, niin jokaisen muuttujan arvo ratkaisussa muuttui!

Jos pienikin muutos yhtälöryhmän RHS-luvuissa saa aikaan suuria muutoksia muuttujien ratkaisu-arvoihin sanomme, että yhtälöryhmä on herkkä. Herkkyydelle on olemassa mitta (kerroinmatriisin kuntoluku), mutta emme opettele sitä vielä nyt.

Toinen esimerkki

Edellisessä esimerkissä muutos RHS:ssä oli melko suuri. Seuraavaksi katsomme vastaavan esimerkin, jossa RHS:n muutos on pienempi (realistisempi, koska pieniä muutoksia on aina).

Olkoon yhtälöryhmän kertoimet samat kuin edellisessä esimerkissä. Alkutilanteen RHS on

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ja lopputilanteen RHS olkoon

$$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4.1 \end{pmatrix} = \vec{b}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \Delta\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} = 0.1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \vec{b}_1 + \Delta\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4.1 \end{pmatrix}$$

Laskemme vastaavan muutoksen ratkaisuvektorissa $\vec{x}$:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{x} &= \vec{x}_3 - \vec{x}_1 = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}_3 - \mathbf{A}^{-1}\vec{b}_1 \\ &= \mathbf{A}^{-1}(\vec{b}_3 - \vec{b}_1) = \mathbf{A}^{-1}\Delta\vec{b} \quad \longrightarrow \boxed{\Delta\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\vec{b}} \\ &= 0.1 \cdot \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & -0.75 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1.5 & 2 & -1.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.075 \\ 0.1 \\ -0.125 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esimerkkien yhteenveto

Yksinkertainen periaate: Tarkastellaan yhtälöryhmää $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. Jos k :nnen yhtälön RHS kasvaa yhdellä, niin ratkaisuvektori muuttuu määrällä, joka on kerroinmatriisin käänteismatriisin k :nnes sarake.

Merkitään $\mathbf{A}$:n käänteismatriisin k :tta saraketta vektorilla $\vec{u}_k = (u_{1k} \ u_{2k} \ \dots \ u_{nk})^T$

Täsmällisempi periaate: Tarkastellaan yhtälöryhmää $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. Jos yhtälöryhmän RHS kasvaa määrällä $\Delta\vec{b} = (\Delta b_1 \ \Delta b_2 \ \dots \ \Delta b_n)^T$, niin ratkaisuvektori muuttuu määrällä

$$\Delta\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\vec{b} = \Delta b_1 \vec{u}_1 + \Delta b_2 \vec{u}_2 + \dots \Delta b_n \vec{u}_n$$

5 DETERMINANTIT

Ch:Determ

5.1 Determinantti

Sec:DetDef

Tämä kappale jakautuu kolmeen alakappaleeseen. Ensimmäisessä alakappaleessa määrittelemme kaksi- ja kolmiriviset determinantit. Nämä kaavat löytyvät taulukkokirjoista. Toisessa alakappaleessa yleistämme determinantin isommille kaavioille ja toteamme koko joukon ominaisuuksia determinantille. Ominaisuuksien perustelut löytyvät lisämateriaalista.

Tekniikan opiskelussa usein ajatellaan, että kaksi- ja kolmiriviset determinantit riittävät. Tämä ei kuitenkaan nyt riitä. Esimerkiksi lineaarisen optimoinnin tarpeita varten opiskelijan tulee opetella myös käsittelemään isojakin lukukaavioita.

5.1.1 Kaksi- ja kolmirivinen determinantti

t_kaksijakolme

def_kaksi_det

Määritelmä 87 (*Kaksirivinen determinantti, [määritelmä löytyy taulukkokirjoista]*) 2×2 -matriisiin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ determinantti on $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Kaksirivisen matriisin determinantille käytämme myös merkintää

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (5.1) \quad \text{kaksirivinen}$$

Huomaa, että merkintä $\overset{\text{kaksirivinen_det}}{(5.1)}$ tarkoittaa siis reaalilukua $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ eikä mitään lukukaaviota.

Esimerkki 88

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2 \quad (5.2)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-6) - (-4) \cdot 5 = -18 + 20 = 2 \quad (5.3)$$

Huomaa, että lausekkeessa $3 \cdot (-6) - (-4) \cdot 5$ keskimäinen miinusmerkki tulee määritelmästä ja toiset kaksi miinus-merkkiä ovat matriisialkioiden merkkejä. Merkkivirheitä voi estää vain olemalla huolellinen.

Esimerkki 89 Tarkastellaan esimerkkinä yhtälöparia

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari tavalliseen tapaan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 & \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \end{array} \right) \xrightarrow{-a_{21}/a_{11}} \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 & \\ 0 & \det(\mathbf{A}) & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 & \end{array} \right)$$

Siis yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, jos ja vain jos $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

def_kolme_det

Määritelmä 90 (Kolmirivinen determinantti, [määritelmä löytyy taulukkokirjoista])

3×3 -matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ determinantti on

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Esimerkki 91

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (4 \cdot 5 - (-2) \cdot 1) + 2 \cdot (3 \cdot 5 - (-2) \cdot 0) - 1 \cdot (3 \cdot 1 - 4 \cdot 0) \\ &= (20 + 2) + 2 \cdot (15 - 0) - (3 - 0) = 49 \end{aligned}$$

5.1.2 Isot determinantit

det_isot

Määritelmä 92 $n \times n$ -matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ determinantti on luku

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1k} \text{Det} \mathbf{A}_{1k},$$

missä $\mathbf{A}_{1k}$ on matriisin $\mathbf{A}$ alimatriisi, joka saadaan, kun $\mathbf{A}$:n ensimmäinen rivi ja k :s sarake poistetaan. Käytämme determinantille myös merkintää

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ensimmäiseksi tarkistamme, ettei uusi määritelmä ole ristiriidassa aiemmin antamiemme kaksi- ja kolmirivisten determinantin kaavojen kanssa.

Esimerkki 93 (1) Sovelletaan ensin uutta määritelmää 3-riviseen kaavioon.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Uusi määritelmä antaa siis täsmälleen saman lausekkeen kuin aiempi määritelmä (90). def_kolme_det

(2) Toiseksi tutkimme kaavaa 2-rivisen kaavion yhteydessä. Sovimme, että yksirivinen determinantti on sama kuin kaavion ainoa alkio. (Siis $\det(a) = |a| = a$. Huomaa, että merkintä $|a|$ ei nyt tarkoita luvun itseisarvoa, vaan 1×1 matriisin (a) determinanttia.) Kun näin on sovittu, voidaan uutta määritelmää soveltaa myös kaksiriviseen determinanttiin.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2}a_{12}|a_{21}| \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

Taas oikein. Siis kaksirivisen determinantin tapauksessa saadaan sama lauseke kuin määritelmässä (87) def_kaksidet_kaksi_det sivulla 97.

Seuraavassa esitellyt determinantin ominaisuudet ovat aiheen ymmärtämisen kannalta hyvin tärkeitä. Ne tulee ymmärtää hyvin. Siksi niistä esitetään sekä sanallinen (mahdollisimman havainnollinen), että kaavanomainen (mahdollisimman täsmällinen) muoto. Ominaisuudet on esitetty lauseen muodossa. Lauseiden todistukset on esitetty lisämateriaalissa.

Jotta kaavat olisivat helpot muodostaa, sovimme epästandardin, vain tässä yhteydessä käytettävän merkinnän.

Olkoon tarkasteltavina $n \times n$ -matriisi $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ja n -alkioinen pystyvektori $\vec{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)^T$. Sovimme, että tässä kappaleessa (ja myöhemmin Cramerin kaavojen yhteydessä) merkintä

$$\mathbf{A}[k : \vec{u}]$$

tarkoittaa matriisia, joka saadaan, kun $\mathbf{A}$:n k :s sarake korvataan pystyvektorilla $\vec{u}$. Jos siis esimerkiksi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix},$$

niin

$$\mathbf{A}[2 : \vec{u}] = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Lisäksi käytämme paljon käytettyä merkintää, jossa matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ k :tta saraketta merkitään pystyvektorilla

$$\vec{a}_{\bullet k} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

th_det1 **Lause 94** Tarkastellaan $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$.

(Sanallinen muoto:) Jos neliömatriisin $\mathbf{A}$ jonkin sarakkeen kaikki alkiot ovat nollia, niin matriisin determinanti on nolla.

(Kaavana:)

$$\vec{a}_{\bullet k} = \vec{0} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$$

(esimerkki:)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

th_det2 **Lause 95** Tarkastellaan $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$.

(Sanallinen muoto:) Jos neliömatriisin $\mathbf{A}$ kaksi saraketta vaihtavat paikkaa, niin syntyvän matriisin determinanti on alkuperäisen vastaluku.

(Kaavana:)

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}[j : \vec{a}_{\bullet k}][k : \vec{a}_{\bullet j}] \Rightarrow \det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$$

(Esimerkki:)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

th_det3 **Lause 96** Tarkastellaan $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$.

(Sanallinen muoto:) Jos neliömatriisissa $\mathbf{A}$ on kaksi identtistä saraketta, niin matriisin determinanti on 0.

(Kaavana:)

$$j \neq k, \text{ ja } \vec{a}_{\bullet j} = \vec{a}_{\bullet k} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$$

(Esimerkki:)

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -5 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

th_det4

Lause 97 Tarkastellaan $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$.(Sanallinen muoto:) Neliömatriisin $\mathbf{A}$ determinantin lasku on k :nnen sarakkeen suhteen lineaarinen operaatio.

(Kaavana:)

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}[k : \vec{u} + \vec{v}]) &= \det(\mathbf{A}[k : \vec{u}]) + \det(\mathbf{A}[k : \vec{v}]), \quad \text{ja} \\ \det(\mathbf{A}[k : \lambda \cdot \vec{u}]) &= \lambda \cdot \det(\mathbf{A}[k : \vec{u}]) \end{aligned}$$

(Esimerkki:)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 5+1 & 3 \\ -5 & 2+9 & 4 \\ 0 & 3-2 & 7 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 100 \cdot 5 & 3 \\ -5 & 100 \cdot 2 & 4 \\ 0 & 100 \cdot 3 & 7 \end{vmatrix} &= 100 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

th_det5

Lause 98 Tarkastellaan $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$.(Sanallinen muoto:) Jos neliömatriisin $\mathbf{A}$ sarake kerrotaan reaalityylillä λ ja näin saatu sarake lisätään toiseen $\mathbf{A}$:n sarakkeeseen, niin syntyvän uuden matriisin determinantti on sama, kuin alkuperäisen matriisin determinantti.

(Kaavana:)

$$j \neq k \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}[k : \vec{a}_{\bullet k} + \lambda \vec{a}_{\bullet j}]) = \det(\mathbf{A})$$

(Esimerkki:)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \det \mathbf{A}[1 : \vec{a}_{\bullet 1} + 5 \cdot \vec{a}_{\bullet 2}]$$

th_det6

Lause 99 Tarkastellaan $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$.(Sanallinen muoto:) Jos jokin neliömatriisin $\mathbf{A}$ sarake voidaan lausua muiden sarakkeiden lineaarikombinaationa, niin matriisin determinantti on nolla.

(Esimerkki:)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{sillä } \vec{a}_{\bullet 3} = \vec{a}_{\bullet 1} + 2 \cdot \vec{a}_{\bullet 2}$$

th_det6b

Lause 100 Tarkastellaan $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$.(Sanallinen muoto:) Neliömatriisilla $\mathbf{A}$ ja sen transpoosilla $\mathbf{A}^T$ on samat determinantit.

(Kaavana:)

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$$

(Esimerkki:)

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

th_det7

Lause 101 Lauseissa (94), (95), (96), (97), (98) ja (99) matriisin sarakkeita koskevat tulokset ovat voimassa myös matriisin riveille.

th_det8

Lause 102 Tarkastellaan $n \times n$ -matriiseja $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$.

(Sanallinen muoto:) Tulon determinantti on determinanttien tulo.

(Kaavana:)

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$$

th_det9

Lause 103 (Sanallinen muoto:) Yksikkömatriisin determinantti on 1.

(Kaavana:)

$$\det(\mathbf{I}) = 1$$

th_det10

Lause 104 Tarkastellaan $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$.

(Sanallinen muoto:) Matriisi on säännöllinen (eli sille on olemassa käänteismatriisi), jos ja vain jos matriisin determinantti ei ole nolla.

(Kaavana:)

$$\exists \mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

Todistus: $\Rightarrow$ (eli $\exists \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$)

Oletamme nyt, että käänteismatriisi on olemassa. Määritetään käänteismatriisi rivioperaatioiden avulla Gaussin algoritmilla. Aluksi laadimme kaavion, jonka vasen puoli on $\mathbf{A}$. Jokaisessa vaiheessa algoritmin aikana kaavion vasemman osan determinantti joko, säilyy muuttumattomana, vaihtaa merkkiä tai tulee kerrotuksi nolasta eroavalla luvulla. Viimeisen kaavion vasemman puolen determinantti on 1. Siis ensimmäisen kaavion vasemman osan determinantti ei voi olla nolla.

 $\Leftarrow$ (eli $\nexists \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$)

Oletamme nyt, että käänteismatriisia ei ole olemassa. Aloitetaan käänteismatriisin määrittäminen kuten edellä. Oletuksen mukaan Gaussin algoritmi ei onnistu, vaan pivotointi epäonnistuu jossakin vaiheessa. Tämä merkitsee, että viimeisessä kaaviossa on rivi, jonka vasen osa on täynnä nollia. Siis jokin $\mathbf{A}$:n rivi voidaan lausua muiden lineaarikombinaationa ja lauseiden (99) ja (101) mukaan determinantti on nolla. $\square$

th_det11

Lause 105 Jos $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$ on säännöllinen, niin

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Edellä oli suuri joukko lauseita. Tehdään vielä yhteenveto:

(lause 94 sivu 100)	th_det1	th_det1	Jos neliömatriisin $\mathbf{A}$ jonkin sarakkeen kaikki alkiot ovat nollia, niin matriisin determinantti on nolla.
(lause 95 sivu 100)	th_det2	th_det2	Jos neliömatriisin $\mathbf{A}$ kaksi saraketta vaihtavat paikkaa, niin syntyvän matriisin determinantti on alkuperäisen vastaluku.
(lause 96 sivu 100)	th_det3	th_det3	Jos neliömatriisissa $\mathbf{A}$ on kaksi identtistä saraketta, niin matriisin determinantti on 0.
(lause 97 sivu 101)	th_det4	th_det4	Neliömatriisin $\mathbf{A}$ determinantin lasku on k :nnen sarakkeen suhteen lineaarinen operaatio.
(lause 98 sivu 101)	th_det5	th_det5	Jos neliömatriisin $\mathbf{A}$ sarake kerrotaan reaaliluvulla λ ja näin saatu sarake lisätään toiseen $\mathbf{A}$:n sarakkeeseen, niin syntyvän uuden matriisin determinantti on sama, kuin alkuperäisen matriisin determinantti.
(lause 99 sivu 101)	th_det6	th_det6	Jos jokin neliömatriisin $\mathbf{A}$ sarake voidaan lausua muiden sarakkeiden lineaarikombinaationa, niin matriisin determinantti on nolla.
(lause 100 sivu 102)	th_det6b	th_det6b	Neliömatriisilla $\mathbf{A}$ ja sen transpoosilla $\mathbf{A}^T$ on samat determinantit.
(lause 101 sivu 102)	th_det7	th_det7	Lauseissa (94), (95), (96), (97), (98) ja (99) matriisin sarakkeita koskevat tulokset ovat voimassa myös matriisin riveille.
(lause 102 sivu 102)	th_det8	th_det8	$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$
(lause 103 sivu 102)	th_det9	th_det9	$\det(\mathbf{I}) = 1$
(lause 104 sivu 102)	th_det10	th_det10	Matriisi on säännöllinen (eli sille on olemassa käänteismatriisi), jos ja vain jos matriisin determinantti ei ole nolla.
(lause 105 sivu 103)	th_det11	th_det11	Jos $n \times n$ -matriisia $\mathbf{A}$ on säännöllinen, niin
			$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$

5.2 Determinantin laskeminen

Sec:DetLasku

Tässä kappaleessa opimme kaksi tapaa laskea determinantin arvo. Ensimmäinen tapa, Gaussin algoritmi, perustuu rivioperaatioihin. Rivioperaatiot osataan jo, joten menettely on varsin helppo omaksua. Toinen tapa perustuu determinantin lausumiseen pienempien alideterminanttien lineaarikombinaationa. Menettely johtaa selvään kaavaan,

mikä usein koetaan helpotuksena.

Nämä kaksi tapaa näyttävät aluksi hyvin erilaisilta. Kumpikin tapa kuitenkin perustuu determinantin määritelmään ja determinantin ominaisuuksiin. Kummallakin tavalla on myös jatkossa oma roolinsa, joten kumpikin laskutapa tulee osata.

5.2.1 Determinantin laskeminen rivioperaatioiden avulla

detGauss

Ensin käsittelemme Gaussin algoritmin, jossa determinantti ensin muutetaan yläkolmiomuotoon. Yläkolmiomuoto (alakolmiomuoto) on muoto, jossa päälävistäjän alla (yllä) on vain nollia. Esimerkiksi determinantit

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

ovat yläkolmiomuodossa.

Lause 106 Jos $n \times n$ -matriisi $\mathbf{A}$ on yläkolmiomuodossa (tai alakolmiomuodossa) niin determinantin arvo on päälävistäjällä olevien alkioden tulo, $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

Todistus: HT

□

Lauseiden ^{th det5} (98) ja ^{th det6b} (100) mukaan determinantin arvo ei muutu, jos sen riviin lisätää skalarilla kerrottu toinen rivi. Tällaisten rivioperaatioiden avulla (ja mahdollisesti vaihtamalla rivejä keskenään) voidaan determinantti aina muuttaa yläkolmiomuotoon. Ennen Gaussin algoritmia esitämme muutaman esimerkin.

Esimerkki 107

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} [1] & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{array}{cc} -1 & +2 \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{array} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & [2] & 1 \\ 0 & 8 & -5 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ -4 \\ \leftarrow \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 2 \cdot (-9) = -18 \end{aligned}$$

Esimerkki 108

$$\begin{aligned}
\left| \begin{array}{cccc|ccc} [2] & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & +1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & \leftarrow & & \\ 4 & 0 & 1 & 3 & & \leftarrow & \\ -2 & 1 & 0 & 5 & & & \leftarrow \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{cccc|ccc} [2] & 1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 4 & & & \\ 0 & -2 & 1 & 5 & & & \\ 0 & 2 & 0 & 4 & & & \end{array} \right| \begin{array}{l} \leftarrow \text{vaihda} \\ \leftarrow \text{vaihda} \end{array} \\
&= (-1) \cdot \left| \begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & [-2] & 1 & 5 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 4 & & & \\ 0 & 2 & 0 & 4 & & & \end{array} \right| \begin{array}{l} +1 \\ \leftarrow \end{array} \\
&= (-1) \cdot \left| \begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & -2 & 1 & 5 & & & \\ 0 & 0 & [1] & 4 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 9 & & & \end{array} \right| \begin{array}{l} -1 \\ \leftarrow \end{array} \\
&= (-1) \cdot \left| \begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & -2 & 1 & 5 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 4 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 5 & & & \end{array} \right| \\
&= (-1) \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 5 = 20
\end{aligned}$$

Olkoon $\mathbf{A}$ seuraavassa $n \times n$ -matriisi. Seuraavan prosessin aikana determinanttikaavion ulkoasu muutetaan vaiheittain yläkolmiomuotoon siten, että lausekkeen arvo koko ajan säilyy samana. Merkitään peräkkäisiä muotoja: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}(1)| = |\mathbf{A}(2)| = |\mathbf{A}(3)| = \dots = |\text{yläkolmiomuoto}|$

Gaussin algoritmi:

(0) Aseta $k = 1$, $|\mathbf{A}(1)| = |\mathbf{A}|$

(1) Otetaan tukialkioksi (pivot element) alkio $a(k)_{kk}$.

(2) Jos tukialkio on 0 ja tukialkion sarakkeessa tukialkion alapuolella on nollasta poikkeava alkio $a(k)_{rk}$, $r > k$, vaihdetaan rivit r ja k keskenään ja saatu uusi determinantti kerrotaan (-1) :llä.

(3) Lisätään tukialkion rivin alapuolella oleviin riveihin tukialkion rivi sopivalla luvulla kerrottuna siten, että tukialkion alapuolella olevat alkion muuttuvat nolliksi.

(4) Jos $k < n - 1$, niin kasvatetaan k :ta yhdellä ja siirrytään kohtaan (1), muuten kohtaan (5).

(5) $\det(\mathbf{A}) = a(k)_{11}a(k)_{22} \cdots a(k)_{nn}$

Huomautus: Kohdan (3) rivioperaatiot eivät onnistu, jos tukialkio on 0. Tämän takia tehdään rivinvaihto kohdassa (2), jotta tukialkio olisi nolasta poikkeava. Jos tukialkio ja lisäksi kaikki sen alla olevat alkioit ovat nollia, ei kohdassa (3) tarvitse tehdä mitään. Poiketen edeltävistä Gaussin nimeä kantavista algoritmeista, tämä algoritmi toimii myös, kun $\det(\mathbf{A}) = 0$. Silloin diagonaalille jää 0 ja determinantin arvoksi tulee 0, niin kuin pitääkin!

On hyvä huomata, että edellä kuvattu menettely toimii aina. Determinantin laskeminen rivioperaatioiden avulla voidaan tehdä mekaanisesti, mutta hyvä ”pelisilmä” auttaa usein löytämään nopeita reittejä kolmiokaavioon. Kaavioiden käsittely determinantin laskun aikana sallii ”sarakeoperaatiot”, mutta näitä kannattaa nyt välttää. Oppimisen kannalta on nyt hyvä keskittyä rivioperaatioiden oppimiseen. Jos siis havaitset mahdollisuuden ”sarakeoperaatioihin”, niin transponoi kaavio ja jatka rivioperaatioilla.

5.2.2 Determinantin laskeminen minorikehitelmällä

detMinor*i*

Määritelmä 109 Matriisin $\mathbf{A}$ alimatriisi $\mathbf{A}_{ij}$ saadaan poistamalla $\mathbf{A}$:sta i :s rivi ja j :s sarake. Alimatriisin determinantt $\det(\mathbf{A}_{ij})$ on matriisin $\mathbf{A}$ alkioon a_{ij} liittyvä minori (alideterminantti). Lukua $(-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$ sanotaan matriisin $\mathbf{A}$ alkioon a_{ij} liittyväksi kofaktoriksi.

Esimerkki 110 Jos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 7 & 1 \\ -2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

niin

$$\mathbf{A}_{23} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 7 & 1 \\ -2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vastaavat alkioon a_{23} liittyvät minori ja kofaktori ovat

$$\begin{aligned} \text{minori} &= \det(\mathbf{A}_{23}) = 3 \\ \text{kofaktori} &= (-1)^{2+3} \det(\mathbf{A}_{23}) = -3 \end{aligned}$$

Lause 111 $n \times n$ -neliömatriisin $\mathbf{A}$ determinantti saadaan laskettua kaavoilla

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}) \quad \text{kehitemä } i\text{:nnen rivin suhteen}$$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}) \quad \text{kehitemä } j\text{:nnen sarakkeen suhteen}$$

Determinantin kehittäminen kannattaa perustaa riviin tai sarakkeeseen, jolla on mahdollisimman monta nollaa.

Esimerkki 112 (1) Kehitetään determinantti ensimmäisen rivin suhteen

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\mathbf{A}_{1j}) \\ &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-15 - 0) + (-1) \cdot 3 \cdot (-3 - 0) + (-1) \cdot (2 + 10) \\ &= -18 \end{aligned}$$

(2) Kehitetään sama determinantti toisen rivin suhteen

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^3 (-1)^{2+j} a_{2j} \det(\mathbf{A}_{2j}) \\ &= (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \cdot (-9 + 2) + 5 \cdot (-3 - 2) - 0 \\ &= -18 \end{aligned}$$

Käytännön laskemista helpottaa se, että kofaktoreiden merkkikaavio on varsin yksinkertainen:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

5.3 Matriisin kääntäminen adjungaattilla

Sec:MatInvAdj

Määritelmä 113 $n \times n$ -matriisin $\mathbf{A}$ adjungaatti on $n \times n$ -matriisi $\text{adj}(\mathbf{A}) = (\alpha_{ij})$, missä $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ji})$ (, joka on siis alkioon a_{ji} liittyvä kofaktori).

Siis adjungaatti on kofaktorikaavion transpoosi.

Lause 114 (1)

$$\text{adj}(\mathbf{A})\mathbf{A} = \mathbf{A}\text{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}$$

(2) Jos $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, niin

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \text{adj}(\mathbf{A})$$

Todistus: (1)

$$\begin{aligned} (\text{adj}(\mathbf{A})\mathbf{A})_{ij} &= \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{kj} (-1)^{i+k} \det(\mathbf{A}_{ki}) \\ &= \det(\mathbf{A}[i : \sum_{k=1}^n a_{kj} \vec{e}_k]) = \det(\mathbf{A}[i : \vec{a}_{\bullet j}]) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{kun } i \neq j \\ \det(\mathbf{A}), & \text{kun } i = j \end{cases} \\ &= \det(\mathbf{A}) \delta_{ij} \end{aligned}$$

Siis $\text{adj}(\mathbf{A})\mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}$. Toisaalta voimme päätellä, että adjungaatin transpoosi on transpoosin adjungaatti seuraavasti:

$$(\text{adj}(\mathbf{A})^T)_{ij} = \text{adj}(\mathbf{A})_{ji} = (-1)^{j+i} \det(\mathbf{A}_{ij}) = (-1)^{i+j} \det((\mathbf{A}^T)_{ji}) = (\text{adj}(\mathbf{A}^T))_{ij}$$

Tästä seuraa, että

$$\mathbf{A}\text{adj}(\mathbf{A}) = (\text{adj}(\mathbf{A})^T \mathbf{A}^T)^T = (\text{adj}(\mathbf{A}^T) \mathbf{A}^T)^T = (\det(\mathbf{A}^T) \mathbf{I})^T = \det(\mathbf{A}) \mathbf{I}$$

(2) Seuraa välittömästi kohdasta (1). □

Esimerkki 115 Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Silloin

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (3 - 1) - 3 \cdot (2 - 0) + (2 - 0) = 2 \end{aligned}$$

$$|\mathbf{A}_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad |\mathbf{A}_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad |\mathbf{A}_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$|\mathbf{A}_{21}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad |\mathbf{A}_{22}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad |\mathbf{A}_{23}| = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|\mathbf{A}_{31}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad |\mathbf{A}_{32}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad |\mathbf{A}_{33}| = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

ja

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{pmatrix} +|\mathbf{A}_{11}| & -|\mathbf{A}_{21}| & +|\mathbf{A}_{31}| \\ -|\mathbf{A}_{12}| & +|\mathbf{A}_{22}| & -|\mathbf{A}_{32}| \\ +|\mathbf{A}_{13}| & -|\mathbf{A}_{23}| & +|\mathbf{A}_{33}| \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & -0.5 \\ 1 & -1.5 & 1.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tarkistus:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & -0.5 \\ 1 & -1.5 & 1.5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & -0.5 \\ 1 & -1.5 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.4 Cramerin kaavat

Sec:Cramer

Edellä käydyt tarkastelut antavat nyt mahdollisuuden johtaa kaava myös yhtälöryhmän ratkaisulle silloin, kun ratkaisu on yksikäsitteinen. Kysymys ei kuitenkaan ole vain keinosta saada kaava, vaan esimerkit tuovat esiin, miksi Cramerin kaavat ovat korvaamaton apu eräissä ongelmissa.

Lause 116 (Cramerin kaavat) (Oletus:) Olkoon $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, jossa muuttujia on yhtä monta kuin yhtälöitä, ja yhtälöryhmän kerroinmatriisi on säännöllinen. Auki kirjoitettuna:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0.$$

(Väite sanallisesti:) Yhtälöryhmän k :s tuntematon saadaan lausekkeesta

$$x_k = \frac{D_k}{\det(\mathbf{A})},$$

missä D_k on determinantti, joka saadaan, kun kerroinmatriisin k :s sarake korvataan $\vec{b}$:llä (eli yhtälöryhmän RHS:llä).

(Väite kaavana:)

$$x_k = \frac{\det(\mathbf{A}[k : \vec{b}])}{\det(\mathbf{A})}.$$

(Kaava aukikirjoitettuna:)

$$x_k = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(k-1)} & b_1 & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(k-1)} & b_2 & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(k-1)} & b_1 & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Todistus: Lausekkeiden yksinkertaistamiseksi merkitsemme tämän todistuksen ajan matriisiin $\mathbf{A}$ alkioon a_{ij} liittyvää kofaktoria symbolilla c_{ij} . Koska $\mathbf{A}$ on säännöllinen, on sillä käänteismatriisi, jonka voimme lausua adjungaatin avulla. Siis

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \mathbf{A}^{-1}\vec{b} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \text{adj}(\mathbf{A})\vec{b} \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ratkaisuvektorin k :s koordinaatti on siis

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \sum_{j=1}^n c_{jk} b_j \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} b_j \det(\mathbf{A}_{jk}) \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \det(\mathbf{A}[k : \vec{b}]) \end{aligned}$$

□

Esimerkki 117 Ratkaistaksemme yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2x + 9y - 2z = 2 \\ 7x - 3y - 6z = 8 \\ -x + 2y + 3z = 1 \end{cases},$$

laskemme determinantit

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 9 & -2 \\ 7 & -3 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -151 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} \mathbf{2} & 9 & -2 \\ \mathbf{8} & -3 & -6 \\ \mathbf{1} & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{8} & -6 \\ \mathbf{1} & 3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{8} & -3 \\ \mathbf{1} & 2 \end{vmatrix} = -302 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{2} & -2 \\ 7 & \mathbf{8} & -6 \\ -1 & \mathbf{1} & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{8} & -6 \\ \mathbf{1} & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 7 & \mathbf{8} \\ -1 & \mathbf{1} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 9 & \mathbf{2} \\ 7 & -3 & \mathbf{8} \\ -1 & 2 & \mathbf{1} \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & \mathbf{8} \\ 2 & \mathbf{1} \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 7 & \mathbf{8} \\ -1 & \mathbf{1} \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -151 \end{aligned}$$

Nyt $x = D_1/D = 2$, $y = D_2/D = 0$ ja $z = D_3/D = 1$.

Esimerkki 118 Seuraavaksi palaamme esimerkkiin ^{|esim1_c2s4}(??), joka oli jo sivulla ^{|esim1_c2s4}???. Ratkaistavana oli yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - \alpha\beta y = 0 \\ -ty + z = I_0 \end{cases},$$

missä

x = kulutus tasapainotilassa ,

y = kansantulo tasapainotilassa ,

z = investoinnit tasapainotilassa ,

I_0 = keskimääräinen investointitaso (oletetaan vakioksi),

s = säästämisaste ($0 \leq s \leq 1$, oletetaan vakioksi),

t = veroaste ($0 \leq t \leq 1$, oletetaan vakioksi),

k = investointien herkkyyden muutokselle, (oletetaan vakioksi)

$\alpha = 1 - s$,

$\beta = 1 - t$

Yhtälöryhmässä esiintyy nyt kirjainkertoimia, joiden numeroarvot eivät ole tiedossa. Silti haluamme voida ratkaista yhtälöryhmän. Toisessa pivotoinnissa voi tulla ongelmia, jos käytämme rivioperaatioita. Cramerin kaavoja käytettäessä, ei tarvitse pivotoi-da, vaan kaavat perustuvat determinantteihin, joiden lasku on tässä tilanteessa suora-viivaista. Kerroinmatriisi ja RHS ovat nyt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\alpha\beta & 0 \\ 0 & -t & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_0 \end{pmatrix}$$

ja tarvittavat determinantit ovat:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\alpha\beta & 0 \\ 0 & -t & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{kehitetään 1. sarakkeen suhteen}) \\ &= +(-1) \cdot \begin{vmatrix} -\alpha\beta & 0 \\ -t & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -t & 1 \end{vmatrix} + 0 \\ &= \alpha\beta - (1-t) = -s(1-t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha\beta & 0 \\ I_0 & -t & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{kehitetään 1. sarakkeen suhteen}) \\ &= +0 - 0 + I_0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\alpha\beta & 0 \end{vmatrix} \\ &= -I_0\alpha\beta = -I_0(1-s)(1-t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{kehitetään 2. sarakkeen suhteen}) \\ &= -0 + 0 - I_0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -I_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\alpha\beta & 0 \\ 0 & -t & I_0 \end{vmatrix} \quad (\text{kehitetään 3. sarakkeen suhteen}) \\ &= +0 - 0 + I_0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\alpha\beta \end{vmatrix} = I_0(\alpha\beta - 1) = I_0((1-s)(1-t) - 1) \end{aligned}$$

Siis ratkaisu on olemassa, kun $s \neq 0$ ja $t \neq 1$ ja silloin tasapainossa

$$\text{kulutus} = x = \frac{D_1}{D} = \frac{-I_0(1-s)(1-t)}{-s(1-t)} = \frac{I_0(1-s)}{s}$$

$$\text{kansantulo} = y = \frac{D_2}{D} = \frac{-I_0}{-s(1-t)} = \frac{I_0}{s(1-t)}$$

$$\text{investoinnit} = z = \frac{D_3}{D} = \frac{I_0((1-s)(1-t)-1)}{-s(1-t)} = I_0 \left(1 + \frac{t}{s(1-t)} \right)$$

5.5 Homogeeniset yhtälöryhmät

Sec:YRHomog

Tässä kappaleessa tutkitaan yhtälöryhmää, jossa on n muuttujaa ja n yhtälöä, ja yksi yhtälöryhmän kerroinmatriisin sarake voidaan lausua muiden sarakkeiden lineaarikombinaationa. Voisimme toki tutkia jo tapausta, jossa ”yksi tai useampi” sarake voidaan lausua muiden lineaarikombinaationa, mutta lykkäämme tämän tapauksen käsittelyn lukuun 5.

Yksinkertaistamalla ongelmanasettelua saamme helpommin luettavan esityksen. Näillä eväillä tulemme luvussa 4 laskemaan matriisien ominaisvektoreita.

Määritelmä 119 *Yhtälöryhmä on homogeeninen, jos jokaisen yhtälön RHS on nolla.*

Homogeeninen yhtälöryhmä on siis muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn} = 0 \end{cases}$$

Homogeenisella yhtälöryhmällä on aina ratkaisu $\vec{x} = \vec{0}$, jota sanomme triviaaliksi ratkaisuksi. Jos yhtälöryhmän kerroinmatriisi on säännöllinen ($\det(\mathbf{A}) \neq 0$), niin triviaali ratkaisu on ainoa ratkaisu.

Jotta homogeenisella yhtälöryhmällä (n muuttujaa ja n yhtälöä) olisi ei-triviaali ratkaisu, tulee kerroinmatriisin determinantin olla 0. Silloin yhtälöryhmää ei voida ratkaista

käänteismatriisin tai Cramerin kaavojen avulla, vaan tulee suorittaa yhtälöryhmän ratkaisu Gaussin algoritmin yleistä muotoa noudattaen.

esim01_Markov

Esimerkki 120 Firmassa on käytössä 70 autoa. Autojen kunto vaihtelee niin, että autot luokitellaan kolmeen kuntoluokkaan (1) hyvä kunto, (2) kohtalainen kunto ja (3) heikko kunto. Autoja huolletaan määräajoin ja tarvittaessa korjataan sopimushuollossa. Tarvittaessa loppuunajettu auto korvataan uudella, jolloin kuntoluokka nousee (3):sta (1):een. Huoltovälit ja huollon taso ovat sellaiset, että siirtymistodennäköisyydet eri luokkien välillä puolen vuoden jaksossa arvioidaan seuraaviksi:

	luokasta (1)	luokasta (2)	luokasta (3)
luokkaan (1)	$p_{11} = 0.80$	$p_{12} = 0.05$	$p_{13} = 0.10$
luokkaan (2)	$p_{21} = 0.15$	$p_{22} = 0.70$	$p_{23} = 0.10$
luokkaan (3)	$p_{31} = 0.05$	$p_{32} = 0.25$	$p_{33} = 0.80$

Jos hetkellä t eri luokissa olevien autojen lukumäärät ovat $x_1(t)$ autoa luokassa (1), $x_2(t)$ autoa luokassa (2) ja $x_3(t)$ autoa luokassa (3), niin hetkellä $t + 1$ lukumäärät ovat

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= p_{11}x_1(t) + p_{12}x_2(t) + p_{13}x_3(t) \\x_2(t+1) &= p_{21}x_1(t) + p_{22}x_2(t) + p_{23}x_3(t) \\x_3(t+1) &= p_{31}x_1(t) + p_{32}x_2(t) + p_{33}x_3(t)\end{aligned}$$

eli

$$\vec{x}(t+1) = \mathbf{P}\vec{x}(t)$$

Jos huoltosysteemi ei muutu ja siirtymätodennäköisyydet pysyvät samoina pitkän ajan, lähestytään tasapainotilaa, jossa tasapainoarvot $x_k(t+1) = x_k(t) = x_k$ toteuttavat yhtälöt

$$\begin{aligned}&\begin{cases} p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + p_{13}x_3 = x_1 \\ p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + p_{23}x_3 = x_2 \\ p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + p_{33}x_3 = x_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (p_{11}-1)x_1 + p_{12}x_2 + p_{13}x_3 = 0 \\ p_{21}x_1 + (p_{22}-1)x_2 + p_{23}x_3 = 0 \\ p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + (p_{33}-1)x_3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -0.20x_1 + 0.05x_2 + 0.10x_3 = 0 \\ 0.15x_1 - 0.30x_2 + 0.10x_3 = 0 \\ 0.05x_1 + 0.25x_2 - 0.20x_3 = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Kun kerroinmatriisin rivit lasketaan yhteen, saadaan nollarivi. Siis yhtälöryhmän kerroinmatriisin determinantti on nolla, ja homogeenisella yhtälöryhmällä on ei-triviaaleja ratkaisuja. Haetaan nämä ratkaisut Gaussin algoritmilla

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} -0.2000 & 0.0500 & 0.1000 & 0 \\ 0.1500 & -0.3000 & 0.1000 & 0 \\ 0.0500 & 0.2500 & -0.2000 & 0 \end{array} \right) & \left| \begin{array}{l} \cdot(-5) \\ \\ \end{array} \right. \\
\sim & \left(\begin{array}{ccc|c} [1] & -0.2500 & -0.5000 & 0 \\ 0.1500 & -0.3000 & 0.1000 & 0 \\ 0.0500 & 0.2500 & -0.2000 & 0 \end{array} \right) & \left| \begin{array}{l} 0.15 \\ \leftarrow \\ \\ \end{array} \right. \begin{array}{l} -0.05 \\ \\ \leftarrow \end{array} \\
\sim & \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -0.2500 & -0.5000 & 0 \\ 0 & [-0.2625] & 0.1750 & 0 \\ 0 & 0.2625 & -0.1750 & 0 \end{array} \right) & \left| \begin{array}{l} \\ +1 \\ \leftarrow \end{array} \right. \\
\sim & \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -0.2500 & -0.5000 & 0 \\ 0 & (-0.2625) & 0.1750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Kirjoitamme kaavion takaisin yhtälöiksi, ja koska x_3 :n sarakkeessa emme pivotoineet, siirrämme x_3 :a sisältävät termit RHS:iin.

$$\begin{cases} x_1 - 0.2500x_2 = 0.5000x_3 \\ -0.2625x_2 = -0.1750x_3 \end{cases}$$

$$\text{Siis} \quad x_2 = \frac{-0.1750}{-0.2625}x_3 = \frac{2}{3}x_3,$$

$$\text{ja} \quad x_1 = \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}x_3 = \frac{2}{3}x_3.$$

Homogeenisen yhtälöryhmän ei-triviaali ratkaisu on siis

$$\begin{cases} x_1 = 2a/3 \\ x_2 = 2a/3 \\ x_3 = a \end{cases}, \quad \text{missä } a \neq 0$$

Toisaalta tässä esimerkissä $x_1 + x_2 + x_3 = 70$, joten

$$\begin{aligned}
\frac{2a}{3} + \frac{2a}{3} + a &= 70 \\
\Leftrightarrow \frac{2a}{3} + \frac{2a}{3} + \frac{3a}{3} &= 70 \\
\Leftrightarrow \frac{7a}{3} &= 70 \\
\Leftrightarrow a &= 30
\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{cases} x_1 = 20 \\ x_2 = 20 \\ x_3 = 30 \end{cases}.$$

6 PISTETULON JA RISTITULON SOVELLUKSIA

Ch:DotCross

6.1 Ristitulo determinantin avulla

Sec:CrosDet

Vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ristitulo määriteltiin sivulla ^{DCintro_def1}37 seuraavasti:

Olkoon $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaksi avaruuden vektoria ja olkoon $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ niiden välinen kulma. Vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ristitulo $\vec{a} \times \vec{b}$ on vektori, jonka pituus on

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \gamma,$$

ja suunta määräytyy seuraavasta kolmesta ehdosta

1. vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{a} \times \vec{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan,
2. vektorit $\vec{b}$ ja $\vec{a} \times \vec{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan,
3. vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{a} \times \vec{b}$ (tässä järjestyksessä!) muodostavat positiivisesti suunnistetun systeemin.

Lauseessa ^{laDCintro_lausel}(24) sivulla 39 annettiin vektoreiden $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ja $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ ristitulolle lauseke, jonka saamme determinantti-merkinnän avulla helposti muistettavaan muotoon

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} &= \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

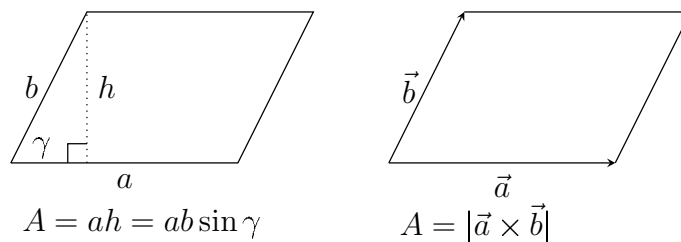
Huomaa, että lauseke ^{CrosDet_eq2}(6.2) ei nyt ole tavallinen lukukaavion determinantti, vaan se on determinantti-merkintä. Kun merkintä kehitetään ensimmäisen rivinsä suhteen, syntyy täsmälleen oikea määritelmän mukainen vektorilauseke ^{CrosDet_eq1}(6.1). Merkinnän voi itse asiassa kehittää minkä tahansa rivin tai sarakkeen suhteen, ja aina saadaan täsmälleen oikea lauseke.

6.2 Pinta-aloja ja tilavuuksia

c:DCpinta_alat

Tason suunnikas.

Suunnikas on nelikulmio, jonka sivut ovat pareittain yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset. Jos mahdollista suunnikas on tapana piirtää niin, että yksi sivu a on vaakasuora. Sanomme sitä kannaksi. Toinen sivu b on vino. Sanomme sitä kyljeksi. Kannan ja kyljen välinen kulma on γ . Kun kuvaan lisätään vielä vaakasuorien sivujen kohtisuora etäisyys, eli suunnikkaan korkeus h , niin suorakulmaisten kolmioiden trigonometriasta saamme helposti suunnikkaan pinta-alan.



Kaava $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$ tuntuu nyt oudolta. Olemme nyt tasossa ja ristitulo kuuluu kolmiulotteisen avaruuden laskuihin. Ihminen kuitenkin aina elää ja hengittää kolmiulotteisessa maailmassa. Jos tason koordinaattiakselien yksikkö-suuntavektorit ovat $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ ($\vec{i} \perp \vec{j}$), niin vektori $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$ on kohtisuorassa kumpaakin akselia vastaan ja kolmikko $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ on positiivisesti suunnistettu. Jos alkuperäiset vektorit ovat $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ ja $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$, niin täydennetään vektorit muotoon $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$ ja $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$. Täydennyksen jälkeen ristitulossa ei enää ole mitään ongelmaa.

6.3 Skalaarikolmitulo ja vektorikolmitulo

6.4 Vektorikolmikon suunnistus

6.5 Suoran ja tason parametrimuotoinen yhtälö

6.6 Suoran ja tason koordinaattimuotoinen yhtälö

6.7 Etäisyyksiä avaruudessa

Sec:DistSpace

6.7.1 Pisteen etäisyys suorasta

Ssec:distPS

Tasossa pisteen etäisyys suorasta on helppo selvittää. Piirrämme taso-ongelmasta kuvan ja teemme konstruktion, joka helpottaa asian hahmottamista. Tämän jälkeen yleis-tämme saamamme kaavat kolmiulotteiseen tilanteeseen.

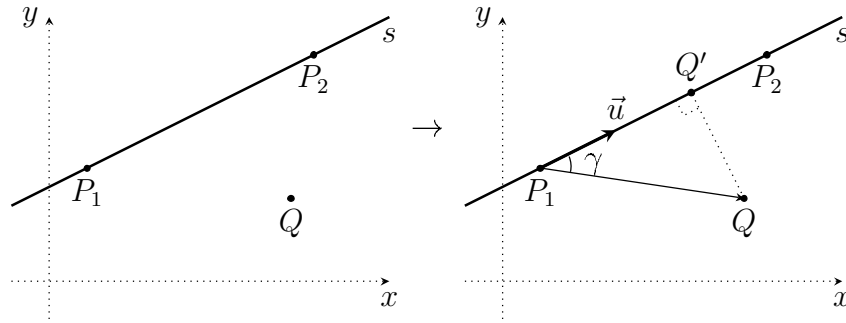


fig:dPs01

Kuva 24. Tason pisteen etäisyys suorasta.

Olkoon s suora, ja olkoon $Q = (x_0, y_0)$ piste suoran ulkopuolella. Etsitään suoralta piste Q' , joka on lähinnä pistettä $Q = (x_0, y_0)$. Pisteen etäisyys suorasta on sen etäisyys suoran lähimmästä pisteestä, $d(Q, s) = d(Q, Q')$.

Lause 121 (Tason pisteen etäisyys suorasta.) Jos suoran s yhtälö on

$$ax + by + c = 0,$$

niin pisteen $Q = (x_0, y_0)$ etäisyys suorasta on

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Perustelu: (Tapaus $b = 0$.) Suora on pystysuora $x = -c/a$, jolloin pisteen etäisyys suorasta on

$$d(Q, s) = \left| x_0 + \frac{c}{a} \right| = \frac{|ax_0 + c|}{|a|} = \frac{|ax_0 + c|}{\sqrt{a^2}}.$$

(Tapaus $b \neq 0$.) Valitaan suoralta pisteet $P_1 = (0, -c/b)$ ja $P_2 = (b, -c/b - a)$. Suoran suuntavektoriksi voimme valita vektorin $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = b\vec{i} - a\vec{j}$. Seuraavaksi upotamme vektorit ja pisteet x, y, z -koordinaatistoon asettamalla z -koordinaatit nolliksi. Kuvan 24 merkinnöin

$$\begin{aligned} d(Q, s) &= d(Q, Q') = |\overrightarrow{P_1Q}| \sin \gamma = \frac{|\overrightarrow{P_1Q} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \\ &= \frac{|(x_0\vec{i} + (y_0 + \frac{c}{b})\vec{j} + 0\vec{k}) \times (b\vec{i} - a\vec{j} + 0\vec{k})|}{\sqrt{b^2 + (-a)^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

□

Lause 122 (Avaruuden pisteen etäisyys suorasta.) Jos suora s kulkee pisteiden P_1 ja P_2 kautta niin pisteen Q etäisyys suorasta on

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1Q} \times \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}.$$

Th:dPs02

Perustelu: Kuvan ^{fig:dPs02}25 merkinnöin valitaan $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2}$.

$$d(Q, s) = d(Q, Q') = |\overrightarrow{P_1Q}| \sin \gamma = \frac{|\overrightarrow{P_1Q} \times \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}.$$

□

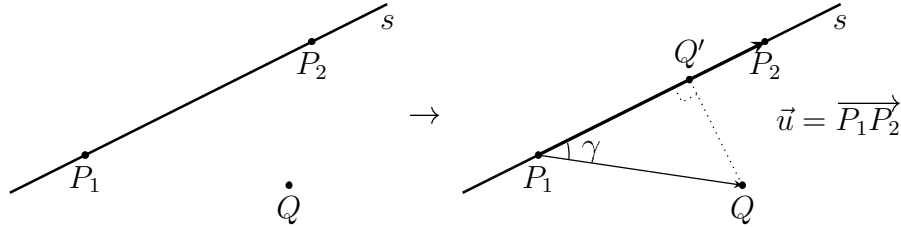


fig:dPs02

Kuva 25. Avaruuden pisteen etäisyys suorasta.

Lauseen ^{Th:dPs02}122 antama etäisyyden lauseke voidaan tarvittaessa kirjoittaa auki käyttäen pisteiden P_1 , P_2 ja Q koordinaatteja, mutta syntyvä lauseke on melko mutkikas, joten emme tee sitä tässä.

6.7.2 Kahden suoran välinen etäisyys

Ssec:distSS

Seuraavaksi selvitämme kahden avaruudessa olevan suoran etäisyyden. Oletamme, että suora s_1 kulkee pisteen P_1 kautta ja on vektorin $\vec{u}_1$ suuntainen, ja että suora s_2 kulkee pisteen P_2 kautta ja on vektorin $\vec{u}_2$ suuntainen.

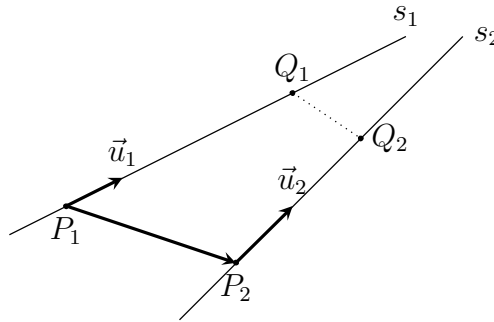


fig:dSS01

Kuva 26. Suoran etäisyys suorasta.

Olkoot $Q_1 \in s_1$ ja $Q_2 \in s_2$ ne suorien pisteet, jotka ovat lähinnä toisiaan. On helppo perustella, että jana $\overline{Q_1Q_2}$ on kohtisuorassa suoria vastaan. Siis $\overline{Q_1Q_2}$ on vektorin $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ suuntainen. Suuntajana $\overrightarrow{P_1P_2}$ voidaan jakaa komponentteihin seuraavasti:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2} + \overrightarrow{Q_2P_2} = \underbrace{\overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{Q_2P_2}}_{\perp \vec{u}_1 \times \vec{u}_2} + \underbrace{\overrightarrow{Q_1Q_2}}_{\parallel \vec{u}_1 \times \vec{u}_2}.$$

Siis suuntajana $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ on suuntajanan $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektoriprojektion vektorin $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ suuntaan.

$$\begin{aligned} d(S_1, S_2) &= d(Q_1, Q_2) = |\overrightarrow{Q_1Q_2}| = |\overrightarrow{P_1P_2}_{\vec{u}_1 \times \vec{u}_2}| \\ &= \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|} \end{aligned} \quad (6.3)$$