



Vaasan yliopisto
UNIVERSITY OF VAASA

MATTI LAAKSONEN

Lineaarialgebra, math.1040

VAASAN YLIOPISTON JULKAISUJA

OPETUSJULKAISUJA
MATEMATIIKKA

Julkaisija

Vaasan yliopisto

Julkaisuajankohta

Elokuu 2014

Tekijä(t) Matti Laaksonen	Julkaisun tyyppi Opetusmoniste	
	Julkaisusarjan nimi, osan numero Vaasan yliopiston julkaisuja	
Yhteystiedot University of Vaasa Department of Mathematics and Statistics P.O.Box 700 FI-65101 Vaasa, Finland	ISBN	
	ISSN	
	Sivumäärä	Kieli suomi
Julkaisun nimike Lineaarialgebra		
Tiivistelmä Opintojakson ”Lineaarialgebra”, math.1040 luentomateriaalia. Osaamistavoitteet: opintojakson jälkeen opiskelija osaa ratkaista minkä tahansa lineaarisen yhtälöryhmän ja osaa tulkita myös kaikki mahdolliset erikoistapaukset, opiskelija osaa ratkaista matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit, tutkia neliömuodon definiittisyyden, opiskelija osaa tutkia matriisin säännöllisyysasteen, opiskelija osaa käyttää Cramerin kaavoja, opiskelija osaa määrittää kolmiulotteisen vektoriavaruuden suoran ja tason yhtälöt, opiskelija osaa laskea ristitulon ja skalaaritulon ja tuntee niiden tavallisimmat käyttötavat fysiikan laskuissa, opiskelija tuntee tavallisimmat matriisihajotelmat, opiskelija osaa määrittää lineaarisen selitysmallin kertoimet PNS-menetelmällä, opiskelija osaa selittää lineaariavaruuden, lineaarisen aliavaruuden, lineaarikuvauksen, kannan ja dimension käsitteet. Sisältö: vektorit, lineaarinen vektoriavaruus, lineaarikuvaukset, lineaarinen yhtälöryhmä, matriisi, determinantti, ominaisarvo, Singulaariarvo-hajotelma, sisätulo, normi, approksimointi normin mielessä, vektoritulo, suora, taso, pseudoinverssi, PNS-menetelmä, tietokone-ohjelman käyttö vektori- ja matriisilaskuissa. (käytetty ohjelmointikieli ilmoitetaan kurssin alussa; Octave, Python, Java tai C.)		
Asiasanat		

SISÄLTÖ

1 Johdanto	6
1.1 Opintojakson ”Lineaarialgebra” kuvaus 2014	6
1.2 Ohjeita kurssin suorittajalle	7
1.3 Ensimmäiset Octave-ohjelmat	8
2 Trigonometriaa ja fysiikan vektoreita	12
2.1 Trigonometriset funktiot	12
2.1.1 Kulmayksiköistä	12
2.1.2 Suorakulmainen kolmio	14
2.1.3 Kolmiolauseet	16
2.1.4 Trigonometriset funktiot	18
2.1.5 Arcus-funktiot	20
2.2 Pisteet ja vektorit suorakulmaisissa koordinaatistoissa	23
2.3 Fysiikan voima-vektori	31
2.4 Pistetulo ja ristitulo	34
2.5 Skalaari- ja vektoriprojektiot	40
2.5.1 Vektorin projektio vektorin suuntaan	41
2.5.2 Voiman momentti pisteen suhteen tasossa	43
3 Lineaariset yhtälöryhmät	46
3.1 Rivioperaatiot	46
3.2 Linearikombinaatiot	54
3.3 Gaussin eliminointikeino	56
3.3.1 Algoritmi, Gaussin eliminointi, helppo tapaus.	57
3.3.2 Algoritmi, Gaussin eliminointi, yleinen tapaus.	61
3.4 Yhtälöryhmän ratkaiseminen Octavella	63
3.5 Homogeeninen yhtälöryhmä	66
4 Matriisit ja matriisilaskut	71
4.1 Matriisi ja matriisilaskut	71
4.2 Transponointi	80
4.3 Käänteismatriisi	82
4.4 Matriisit ja vektorit Octavessa (kesken)	84
4.5 Esimerkki Markovin ketjusta, ’FlyBike’	85
4.6 Matriisin kääntäminen rivioperaatioilla	90
4.7 Yhtälöryhmän ratkaisun herkkyyys	95

5	Determinantit	97
5.1	Determinantti	97
5.1.1	Kaksi- ja kolmirivinen determinantti	97
5.1.2	Isot determinantit	98
5.2	Determinantin laskeminen	103
5.2.1	Determinantin laskeminen rivioperaatioiden avulla	104
5.2.2	Determinantin laskeminen minorikehitelmällä	106
5.3	Matriisin kääntäminen adjungaattilla	108
5.4	Cramerin kaavat	109
5.5	Homogeeniset yhtälöryhmät	113
6	Pistetulon ja ristitulon sovelluksia	116
6.1	Ristitulo determinantin avulla	116
6.2	Pinta-aloja ja tilavuuksia	117
6.3	Skalaarikolmitulo ja vektorikolmitulo $\lll \square$	117
6.4	Vektorikolmikon suunnistus $\lll \square$	117
6.5	Suoran ja tason parametrimuotoinen yhtälö $\lll \square$	117
6.6	Suoran ja tason koordinaattimuotoinen yhtälö $\lll \square$	117
6.7	Etäisyyksiä avaruudessa	117
6.7.1	Pisteen etäisyys suorasta	117
6.7.2	Kahden suoran välinen etäisyys	119
7	Lineaariavaruudet	121
7.1	Rakenteiden hierarkiaa.	121
7.2	$\mathbb{R}$ - ja $\mathbb{C}$ -kertoiminen lineaariavaruus	125
7.3	Sisätulo ja normi	130
7.3.1	Sisätulo E^n :ssä	130
7.3.2	$\mathbb{R}^n$:n normeja	136
7.3.3	Yleinen tarkastelu	139
7.4	Lineaarinen kuvaus	141
7.5	(x,y) -Tason siirrot, venytykset, peilaukset ja kierrot	143
7.6	Lineaarinen aliavaruus ja span $\lll \square$	146
7.7	Ydin ja kuva	146
8	Kannat ja ortogonaalisuus	151
8.1	Lineaarinen riippumattomuus	151
8.2	Kanta ja dimensio	157
8.3	Matriisin säännöllisyysaste	165
8.4	Pseudoinverssi ja ortogonaaliprojektio	168
8.4.1	Ortogonaaliprojektio	170
8.5	Ortonormeerattu kanta, Gram-Schmidt	171
8.6	Ortogonaaliset matriisit, QR-hajoitelma	176
8.7	Lineaarikuvauksen matriisi	181
8.8	Kannan vaihto	185

9	Ominaisarvotehtävä	189
9.1	Kompleksinen lineaariavaruus	189
9.1.1	Kompleksiluvut	189
9.1.2	Kompleksiset vektorit ja matriisit	191
9.2	Matriisin ominaisarvot	192
9.2.1	Perusmääritelmät	192
9.2.2	Geometrinen tulkinta helpossa tapauksessa	202
9.2.3	Ominaisarvohajoitelma	204
9.3	Similaarisuus ja matriisin diagonalisointi	206
9.4	Schurin muoto ja normaalit matriisit	210
9.5	Matriisihajoitelmia	217
9.5.1	Jordanin muoto	220
9.6	Matriisin singulaariarvohajoitelma	221
9.7	Matriisinormit	225
9.8	Matriisin kuntoluku	227
9.9	Neliömuodot ja definiittisyys	229

TODO LIST

Lisää esimerkki	27
Lisää esimerkki.	31
Tarkista toleranssi	65
Kappale kesken	84