

laskemme determinantit

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 2 & 9 & -2 \\ 7 & -3 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -151 \\
 D_1 &= \begin{vmatrix} 2 & 9 & -2 \\ 8 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -302 \\
 D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 7 & 8 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
 D_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 7 & -3 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -151
 \end{aligned}$$

Nyt  $x = D_1/D = 2$ ,  $y = D_2/D = 0$  ja  $z = D_3/D = 1$ .

**Esimerkki 103. Kansantulo ja verotus.** Kuvataan kansantulon yhteyttä kulutukseen ja investointeihin muutamalla yhtälöllä. Yhtälöissä esiintyvät kirjaimet ovat seuraavat:

- $x_n$  = kulutus vuonna  $n$ ,
- $y_n$  = kansantulo vuonna  $n$ ,
- $z_n$  = investoinnit vuonna  $n$ ,
- $I_0$  = keskimääräinen investointitaso (oletetaan vakioksi),
- $s$  = säästämistäaste ( $0 \leq s \leq 1$ , oletetaan vakioksi),
- $t$  = veroaste ( $0 \leq t \leq 1$ , oletetaan vakioksi),
- $k$  = investointien herkkyys kulutuksen muutokselle, (oletetaan vakioksi)

Yhtälöt ovat

$$\begin{cases} y_n = x_n + z_n \\ x_n = (1-s)(1-t)y_{n-1} \\ z_n = I_0 + ty_{n-1} + k(x_n - x_{n-1}) \end{cases}$$

Jos taloudessa ei esiinny vakavia häiriöitä, niin vuotuiset arvot alkavat lähestyä tasapainoarvoja;  $x_n, x_{n-1} \rightarrow x$ ,  $y_n, y_{n-1} \rightarrow y$  ja  $z_n, z_{n-1} \rightarrow z$ . Tasapainoa siis kuvaa yhtälöt

$$\begin{cases} y = x + z \\ x = (1-s)(1-t)y \\ z = I_0 + ty \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - \alpha\beta y = 0 \\ -ty + z = I_0 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} \text{missä} \\ (1-s) = \alpha, \\ (1-t) = \beta \end{pmatrix}$$

Heti, kun kertoimien  $s$  ja  $t$  numeroarvot tiedetään, on yhtälöryhmän ratkaiseminen rivioperaatioiden avulla helppo rutiinitehtävä.

Yhtälöryhmän ratkaiseminen tässä yleisessä muodossa, ilman tietoa  $s$ :n ja  $t$ :n numeroarvoista, on edelleen mahdollista tehdä rivioperaatioiden avulla, mutta silloin tulee toimia hyvin tarkasti. Toisessa pivotoinnissa voi tulla ongelmia, jos käytämme rivioperaatioita. Cramerin kaavoja käytettäessä, ei tarvitse pivotoida, vaan kaavat perustuvat determinantteihin, joiden lasku on tässä tilanteessa suoraviivaista. Kerroinmatriisi ja RHS ovat nyt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\alpha\beta & 0 \\ 0 & -t & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_0 \end{pmatrix}$$

ja tarvittavat determinantit ovat:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\alpha\beta & 0 \\ 0 & -t & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{kehitetään 1. sarakkeen suhteen}) \\ &= +(-1) \cdot \begin{vmatrix} -\alpha\beta & 0 \\ -t & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -t & 1 \end{vmatrix} + 0 \\ &= \alpha\beta - (1-t) = -s(1-t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha\beta & 0 \\ I_0 & -t & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{kehitetään 1. sarakkeen suhteen}) \\ &= +0 - 0 + I_0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\alpha\beta & 0 \end{vmatrix} \\ &= -I_0\alpha\beta = -I_0(1-s)(1-t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{kehitetään 2. sarakkeen suhteen}) \\ &= -0 + 0 - I_0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -I_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\alpha\beta & 0 \\ 0 & -t & I_0 \end{vmatrix} \quad (\text{kehitetään 3. sarakkeen suhteen}) \\ &= +0 - 0 + I_0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\alpha\beta \end{vmatrix} = I_0(\alpha\beta - 1) = I_0((1-s)(1-t) - 1) \end{aligned}$$

*Siis ratkaisu on olemassa, kun  $s \neq 0$  ja  $t \neq 1$  ja silloin tasapainossa*

$$\text{kulutus} = x = \frac{D_1}{D} = \frac{-I_0(1-s)(1-t)}{-s(1-t)} = \frac{I_0(1-s)}{s}$$

$$\text{kansantulo} = y = \frac{D_2}{D} = \frac{-I_0}{-s(1-t)} = \frac{I_0}{s(1-t)}$$

$$\text{investoinnit} = z = \frac{D_3}{D} = \frac{I_0((1-s)(1-t) - 1)}{-s(1-t)} = I_0 \left( 1 + \frac{t}{s(1-t)} \right)$$

Edellä esiintynyt esimerkki on tärkeä. Siinä oli kolme muuttujaa  $x$ ,  $y$  ja  $z$ , jotka halutaan ratkaista yhtälöryhmästä. Näiden lisäksi yhtälöryhmän kertoimien joukossa oli kolme kirjainta lisää ( $s$  säästämisaste,  $t$  veroaste ja  $I_0$  keskimääräinen investointitaso).  $s$ ,  $t$  ja  $I_0$  ovat parametrejä, joiden arvo määräytyy siitä minkä maan kansantaloutta kuvaamme ja myös siitä minkä vuoden tietoja tutkimme.

**Esimerkki 104.** *Edellä determinantit olivat kohtuullisen helpot laskea vaikka niissä oli kirjaimia. Jos kaaviot ovat isoja kannattaa käyttää konetta, esimerkiksi graafista laskinta. Seuraavassa on  $5 \times 5$  matriisi, mutta voit kuvitella, että kysymyksessä olisi vaikkapa  $20 \times 20$  matriisi. Toteutus olisi sama.*

*Laske determinantti*

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & a & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{missä } a \in \mathbb{R}.$$

*Koska determinantti on lineaarinen sarakkeen suhteen ja*

$$\mathbf{A}[:, 3] = \vec{a}_{\bullet 3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

*niin voimme siis laskea*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

*Kumpikaan kaavio ei enää sisällä kirjainparametriä, joten determinantit voidaan laskea millä tahansa mekaanisella laitteella. Jos determinantin kaaviossa on useampia kirjain parametreja, niin yksi kerrallaan ne kaikki saadaan tuotua kaavioiden ulkopuolelle.*