Korkolasku ja diskonttaus, L11

Yksinkertainen korkolasku

Koronkorko

Jatkuva korkolasku

Korko-kaavat

Diskonttaus

Tarkastellaan tilannetta, jossa pääomalle maksetaan korkoa. Tulemme seuraavassa systemaattisesti käyttämään seuraavia merkintöjä

K_0	$=$ alkupääoma
p	$=$ korkoprosentti
i	$= \frac{p}{100} =$ korkokanta
t	$=$ korkoaika $(t \leq 1)$
	p.a. $=$ "per annum" (korkojakso $=$ vuosi)
	p.s. $=$ "per semester" (korkojakso $=$ puoli vuotta)
	p.q. $=$ "per quartal" (korkojakso $=$ neljännesvuosi)
ΔK	$= itK_0 =$ pääoman lisäys eli korko
K_t	$= (1 + it)K_0 =$ kasvanut pääoma

Aiheet

Yksinkertainen korkolasku

Koronkorko

Jatkuva korkolasku

Korko-kaavat

Diskonttaus

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Saksalaisen korkolaskun periaate:

- Vuosi on 360 päivää
- Kuukausi on 30 päivää

Esimerkki. Lasketaan korko 1000€ pääomalle ajalta 13.3. – 4.7., kun korko on 12.0% (p.a.) ja käytetään saksalaista korkolaskua.

maaliskuussa	17	päivää
huhti–kesäkuu	$3 \cdot 30 = 90$	päivää
heinäkuussa	4	päivää
yhteensä	111	päivää

$$t = 111/360 \quad \rightarrow \quad \Delta K = itK_0 = 0.12 \cdot \frac{111}{360} \cdot 1000€ = 37.00€$$

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Englantilaisen korkolaskun periaate:

- Vuosi on 365 päivää
- Lasketaan todellinen päivien lukumäärä

Esimerkki. Lasketaan korko 1000€ pääomalle ajalta 13.3. – 4.7., kun korko on 12.0% (p.a.) ja käytetään englantilaista korkolaskua.

maaliskuussa		18	päivää
huhti–kesäkuu	$30+31+30=$	91	päivää
heinäkuussa		4	päivää
yhteensä		113	päivää

$$t = 113/365 \quad \rightarrow \quad \Delta K = itK_0 = 0.12 \cdot \frac{113}{365} \cdot 1000€ = 37.15€$$

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Ranskalaisen korkolaskun periaate:

- Vuosi on 360 päivää
- Lasketaan todellinen päivien lukumäärä

Esimerkki. Lasketaan korko 1000€ pääomalle ajalta 13.3. – 4.7., kun korko on 12.0% (p.a.) ja käytetään ranskalaista korkolaskua.

maaliskuussa		18	päivää
huhti–kesäkuu	$30+31+30=$	91	päivää
heinäkuussa		4	päivää
yhteensä		113	päivää

$$t = 113/360 \quad \to \quad \Delta K = itK_0 = 0.12 \cdot \frac{113}{360} \cdot 1000€ = 37.67€$$

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Jokaisen korkojakson kuluttua pääomaan lisätään korko $\Delta K = iK_0$. Silloin kasvanut pääoma on

$$K_1 = K_0 + iK_0 = (1 + i)K_0,$$

eli alkupääoma kerrotaan tekijällä $(1 + i)$.

Jos pääoma K_0 kasvaa korkoa korolle n korkojaksoa, niin n:n jakson lopussa kasvanut pääoma on

$$K_n = (1 + i)^n K_0.$$

Koronkoron merkinnät ja kaavat ovat

K_0	$=$ alkupääoma
p	$=$ korkoprosentti (jaksoon liittyvä)
i	$= \frac{p}{100} =$ korkokanta (jaksoon liittyvä)
$(1+i)$	$=$ korkotekijä (jaksoon liittyvä)
n	$=$ korkoaikaan sisältyvien jaksojen määrä $(n \in \mathbb{N})$
m	$=$ vuoteen sisältyvien jaksojen määrä $(m \in \mathbb{N})$
	p.a. $=$ ”per annum” (korkojakso $=$ vuosi, $m = 1$)
	p.s. $=$ ”per semester” (korkojakso $=$ puoli vuotta, $m = 2$)
	p.q. $=$ ”per quartal” (korkojakso $=$ neljännesvuosi, $m = 4$)
K_n	$= (1+i)^n K_0 =$ kasvanut pääoma
i_{tod}	$=$ todellinen vuosikorkokanta
$(1+i_{tod})$	$= (1+i)^m =$ todellinen vuosikorkotekijä

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Esimerkki 1. Olkoon korkojakso puoli vuotta ($m = 2$), ja olkoon jakson korkokanta $0.036 = 0.072/2$. Silloin

$$(1 + i_{tod}) = 1.036^2 = 1.073296,$$

joten todellinen vuosikorko on 7.33%.

Esimerkki 2. Olkoon korkojakso neljännesvuosi ($m = 4$), ja olkoon jakson korkokanta $0.018 = 0.072/4$. Silloin

$$(1 + i_{tod}) = 1.018^4 = 1.073967,$$

joten todellinen vuosikorko on 7.40%.

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Esimerkki 3. Olkoon korkojakso kuukausi ($m = 12$), ja olkoon jakson korkokanta $0.006 = 0.072/12$. Silloin

$$(1 + i_{tod}) = 1.006^{12} = 1.074424,$$

joten todellinen vuosikorko on 7.44%.

Esimerkki 4. Olkoon korkojakso päivä ($m = 360$), ja olkoon jakson korkokanta $0.0002 = 0.076/360$. Silloin

$$(1 + i_{tod}) = 1.0002^{360} = 1.0746476,$$

joten todellinen vuosikorko on 7.46%.

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Erot eivät edellä olleet kovin suuria. Jos otetaan lyhytaikaista velkaa korkealla päiväkorolla, niin todellinen vuosikorko saattaa olla yllättävän iso.

Esimerkki 5. Jos otetaan lyhytaikainen laina 0.5% päiväkorolla, niin moni ajattelee sen tekevän noin 15% kuukaudessa ja noin 180% vuodessa. Todellisuudessa silloin

$$(1 + i_{tod}) = 1.005^{360} = 6.0225752$$

joten todellinen vuosikorko on 502.26%.

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Esimerkki 6. Määritä se kuukausikorkokanta, jolla todellinen vuosikorko on 15.00%. Merkitään kysyttyä kuukausikorkokantaa *i*:llä.

$$\begin{aligned} (1+i)^{12} &= 1.1500 \\ \left((1+i)^{12}\right)^{1/12} &= 1.1500^{1/12} \\ (1+i) &= 1.1500^{1/12} = 1.011714917 \end{aligned}$$

joten kysytty kuukausikorkokanta on 0.011714917.

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Jatkossa kaikissa laskuissa lähdetään liikkeelle todellisesta vuosikorosta. Korkojakson (esim. kuukausijakson) korkokanta valitaan niin, että todelliseksi vuosikoroksi tulee valittu korko.

Esimerkki 1. Sovitaan, että lainan todellinen vuosikorko on 6.00%. Määritä tähän todelliseen vuosikorkoon liittyvä kuukausijakson korkokanta i.

$$\begin{aligned}(1+i)^{12} &= 1.06 \\ (1+i) &= 1.06^{1/12} = 1.004867550565 \\ i &= 0{,}004867550565\end{aligned}$$

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Esimerkki 2. Sovitaan, että lainan todellinen vuosikorko on 6.00%. Määritä tähän todelliseen vuosikorkoon liittyvä neljännesvuosi-jakson korkokanta i_q.

$$\begin{aligned}(1+i_q)^4 &= 1.06\\ (1+i_q) &= 1.06^{1/4} = 1.014673846169\\ i_q &= 0.014673846169\end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa korkoaika t ei ole kuukauden monikerta.

Olkoon 1000€:n lainalle sovittu todellinen vuosikorko 6.00% ja korkoaika kolme kuukautta ja 7 päivää, eli saksalaisella tavalla laskettuna 97 päivää ($t = 97/360$).

Siirrymme päiväjaksoon, jolloin päiväjakson korkotekijä on

$$(1+i) = 1.06^{1/360}.$$

Korkoajan lopussa laina maksetaan takaisin korkoineen. Korkoajan lopussa lainan kasvanut pääoma saadaan koronkorolla

$$\begin{aligned} K_t &= (1+i)^{97} K_0 = \left(1.06^{1/360}\right)^{97} K_0 = 1.06^{(97/360)} \cdot 1000€ = 1015.82€ \\ &= (1+i_{tod})^t K_0 \end{aligned}$$

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Usein merkitään

$$(1 + i_{tod}) = e^{\rho},$$

missä ρ on korkointensiteetti.

Edellisen perusteella siis

$$\rho = \ln(1 + i_{tod}).$$

Jatkuvan korkolaskun kaavat voidaan nyt tiivistää seuraaviksi

$$\begin{aligned} K_t &= (1 + i_{tod})^t \cdot K_0 \\ K_t &= e^{\rho t} \cdot K_0 \end{aligned}$$

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Muutama kommentti kaavoihin

$$(1) \qquad (1 + i_{tod}) = e^{\rho}$$
$$(2) \qquad K_t = e^{\rho t} K_0$$

- Kaavassa (1) korkointensiteetti ρ on paljas luku, mutta se liittyy vuosijaksoon.
- Kaavassa (2) korkointensiteetin ρ yksikkö on $\frac{1}{\text{vuosi}}$, sillä eksponentin ρt pitää nyt olla paljas luku.
- Tämän kurssin aikana ρ aina liitetään vuosijaksoon.

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Yksinkertainen korkolasku:

$$K_t = (1 + it)K_0, \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

Koronkorko-lasku:

$$K_n = (1 + i)^n K_0, \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

Jatkuva korkolasku:

$$K_t = (1 + i_{tod})^t K_0 = \mathrm{e}^{\rho t} K_0, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Edellä aina laskettiin kasvanut pääoma alkupääoman ja koron perusteella. Seuraavaksi pohdimme käänteistä ongelmaa:

"Miten suuri tulee alkupääoman K_0 olla, jotta n jakson kuluttua kasvanut pääoma olisi K_n, kun jakson korkotekijä on $(1+i)$?"

$$\text{vastaus:} \qquad K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$$

"Miten suuri tulee alkupääoman K_0 olla, jotta ajan t kuluttua kasvanut pääoma olisi K_t, kun todellinen vuosikorkotekijä on $(1+i_{tod})$?"

$$\text{vastaus:} \qquad K_0 = \frac{K_t}{(1+i_{tod})^t} = \mathrm{e}^{-\rho t} K_t$$

Esimerkki 1. Yrittäjä tietää joutuvansa maksamaan 1000€ maksun kahden ja puolen vuoden kuluttua ($n = 30$ kuukautta, $t = 2.5$ vuotta). Yrittäjällä on mahdollisuus tehdä pitkäaikais-sijoitus 10% todellisella vuosikorolla. Miten suuri sijoitus tulee tehdä, jotta maksu voidaan aikanaan hoitaa kasvaneella pääomalla?

$$\text{kuukausikorkotekijä} = (1+i) = 1.10^{1/12}.$$

Koronkoron kaavalla

$$K_0 = \frac{K_{30}}{(1+i)^n} = \frac{1000€}{1.10^{30/12}} = 787.99€$$

Jatkuvan korkolaskun kaavalla

$$K_0 = \frac{K_t}{(1+i_{tod})^t} = \frac{1000€}{1.10^{2.5}} = 787.99€$$

Aiheet

Yksinkertainen korkolasku

Koronkorko

Jatkuva korkolasku

Korko-kaavat

Diskonttaus

Korkointensiteetin avulla

$$
\begin{aligned}
\rho &= \ln(1.10) = 0{,}095310179804 \\
K_0 &= \mathrm{e}^{-\rho t} K_t \\
&= \mathrm{e}^{-0{,}095310179804 \cdot 2.5} \cdot 1000€ = 787.99€
\end{aligned}
$$

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Esimerkki 2. Nuori mies saa perintönä 1000€, mutta testamentissa säädetään, että hän saa summan vasta 2,5 vuoden kuluttua.

Nuori mies sopii pankin kanssa lainasta 10% todellisella vuosikorolla. Laina mitoitetaan siten, että kahden ja puolen vuoden kuluttua perinnöllä hoidetaan laina korkoineen pois. Lainan määrä on silloin

$$\frac{1000€}{1.10^{2.5}} = 787.99€$$

Aiheet
Yksinkertainen korkolasku
Koronkorko
Jatkuva korkolasku
Korko-kaavat
Diskonttaus

Olkoon n:n jakson lopussa loppupääoma K_n, ja olkoon laskuissa käytetty vuosikorkokanta $i_{tod} = p/100$.
Kun laskemme alkupääoman

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + i_{tod})^n}$$

niin sanomme, että
"K_0 saatiin diskonttaamalla loppupääoma n jakson yli nykyhetkeen p% laskentakorolla."

Esimerkissä 1 meno 1000€ diskontattiin 10% laskentakorolla nykyhetkeen 30 kk-jakson (eli 2,5 vuoden) yli.

Esimerkissä 2 tulo 1000€ diskontattiin 10% laskentakorolla nykyhetkeen 30 kk-jakson (eli 2,5 vuoden) yli.