Talousmatematiikan perusteet, L2

Kertaus

Laskujärjestys

Murtoluvut

Kerrattavia kaavoja

Joukko-oppia

Laskutoimitukset tehdään seuraavassa järjestyksessä

1. Sulkujen sisällä olevat lausekkeet (alkaen sisältä ulospäin)
2. potenssit ja juurilausekkeet
3. kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle
4. yhteen- ja vähennyslasku vasemmalta oikealle.

$$\begin{aligned}
(5^2-(4+3))/3*2-1 &= (5^2-7)/3*2-1 \\
&= (25-7)/3*2-1 \\
&= 18/3*2-1 \\
&= 6*2-1 \\
&= 12-1 \\
&= 11
\end{aligned}$$

Laske seuraavien lausekkeiden arvot:

$$2 * (2+4)/(5-2) \quad =$$

$$((10-6/2)+1) * 4 - 1 \quad =$$

Laske seuraavien lausekkeiden arvot:

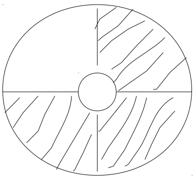
$$\begin{aligned} 2 \cdot (2+4)/(5-2) &= 2 \cdot 6/3 \\ &= 12/3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((10-6/2)+1) \cdot 4 - 1 &= ((10-3)+1) \cdot 4 - 1 \\ &= (7+1) \cdot 4 - 1 \\ &= 8 \cdot 4 - 1 \\ &= 32 - 1 = 31 \end{aligned}$$

wiki-materiaalia: linkki

Murtoluvun Merkitys: $\frac{m}{n}$ on luku, joka saadaan kun ykkönen jaetaan n:ään yhtäsuureen ossaan, ja näitä osia otetaan m kappaletta

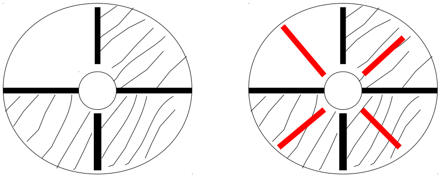
$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.25 + 0.25 + 0.25 = 0.75$$



Viivan alla: NIMITTÄJÄ $= 4$
$=$ miten moneen slice-palaan piza jaetaan

Viivan päällä: OSOITTAJA $= 3$
$=$ miten monta slice-palaa otetaan

Murtoluvun saa laventaa ilman sen merkityksen muuttumista. Laventamisessa osoittaja ja nimittäjä kerrotaan samalla luvulla (tavallisesti pienellä kokonaisluvulla).



2) $$\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{6}{8}$$

Supistamisessa osoittaja ja nimittäjä jaetaan samalla luvulla (tavallisesti pienellä kokonaisluvulla).

$$\frac{6}{10}^{(2} = \frac{6/2}{10/2} = \frac{3}{5}$$

Ennen yhteen- tai vähennyslaskua murtoluvut tulee laventamalla tai supistamalla tehdä saman-nimisiksi

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}+\frac{3}{4} &= \frac{4\cdot 1}{4\cdot 3}+\frac{3\cdot 3}{3\cdot 4} \\ &= \frac{4}{12}+\frac{9}{12}=\frac{13}{12} \end{aligned}$$

Edellä saatu tulos $13/12$ voidaan myös ilmoittaa sekalukuna

$$\frac{13}{12}=1\frac{1}{12} \qquad (1\frac{1}{12}=1+\frac{1}{12}=\frac{12}{12}+\frac{1}{12})$$

Katso Wiki.

Kertolaskussa osoittajat kerrotaan ja nimittäjät kerrotaan

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

Jakolaskussa jaettava murtoluku kerrotaan jakajan käänteisluvulla

$$\frac{2}{3}:\frac{5}{4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$$

Kun kokonaisluvulla kerrotaan, niin kertoja menee viivan päälle

$$2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Kun murtoluku jaetaan kokonaisluvulla, niin jakaja menee viivan alle

$$\frac{2}{3} : 2 = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Kokonaisluku voidaan aina tulkita murtolukuna

$$5 = \frac{5}{1}$$

Laske seuraavat laskut ensin kynällä ja paperilla ja sitten laskimella:

a)

$$(2 \cdot \frac{1}{3} - 1) \cdot 3 =$$

b)

$$(1 + \frac{1}{3}) \cdot (1 + \frac{1}{4}) =$$

c)

$$\frac{1 + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{4}} =$$

Laske seuraavat laskut ensin kynällä ja paperilla ja sitten laskimella:

a)

$$(2 \cdot \frac{1}{3} - 1) \cdot 3 = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{3}\right) \cdot 3 = \frac{-1}{3} \cdot 3 = -1$$

b)

$$(1 + \frac{1}{3}) \cdot (1 + \frac{1}{4}) = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$$

c)

$$\frac{1 + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{4}} = \left(\frac{4}{3}\right) / \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$$

Aiheet
Laskujärjestys
Murtoluvut
Kerrattavia kaavoja
Joukko-oppia

		engl.	(lukuohje)			engl.	(lukuohje)
A	α	alpha	(alffa)	N	ν	nu	(nyy)
B	β	beta	(beetta)	Ξ	ξ	xi	(ksii)
Γ	γ	gamma	(gamma)	O	o	omicron	(omiikron)
Δ	δ	delta	(deltta)	Π	π	pi	(pii)
E	ϵ, ε	epsilon	(epsilon)	P	ρ	rho	(roo)
Z	ζ	zeta	(zeetta)	Σ	σ	sigma	(sigma)
H	η	eta	(eetta)	T	τ	tau	(tau)
Θ	θ, ϑ	theta	(theetta)	Υ	υ	upsilon	(ypsilon)
I	ι	iota	(iootta)	Φ	ϕ, φ	phi	(fii)
K	κ	kappa	(kappa)	X	χ	chi	(khii)
Λ	λ	lambda	(lamda)	Ψ	ψ	psi	(psii)
M	μ	mu	(myy)	Ω	ω	omega	(oomega)

Binomikaavat

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\(a+b)(a-b) &= a^2-b^2\end{aligned}$$

pitää muistaa, että tarvittaessa osaa käyttää

Lausu: "Summan neliö = ensimmäisen neliö + 2 × tulo + toisen neliö"

Aiheet
Laskujärjestys
Murtoluvut
Kerrattavia kaavoja
Joukko-oppia

Potenssikaavat

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \forall b \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Potenssikaavat
sopimukset

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, \forall a \neq 0 \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n}, \forall a \neq 0 \end{aligned}$$

---

kannattaa erityisesti muistaa:

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &= a^{1/2} \\ \sqrt[n]{a} &= a^{1/n} \\ a^{m/n} &= \sqrt[n]{a^m} \end{aligned}$$

Itseisarvo

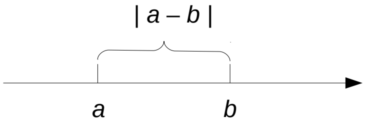
Määritelmä

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kun } a \geq 0, \\ -a, & \text{kun } a \leq 0. \end{cases}$$

Usein sovellustilanne on seuraava

$$\begin{aligned} |U - 5.00| &\leq 0.01 \\ \Leftrightarrow -0.01 \leq U - 5.00 &\leq 0.01 \\ \Leftrightarrow 4.99 \leq U &\leq 5.01 \end{aligned}$$

Kahden luvun erotuksen itseisarvo on niiden etäisyys lukusuoralla



Neliöjuurikaavat reaaliluvuille

$$(1) \qquad b = \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad (a \geq 0) \text{ ja } (b \geq 0) \text{ ja } (b^2 = a)$$

$$(2) \qquad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$(3) \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$(4) \qquad (\sqrt{a})^2 = a$$

$$(5) \qquad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$(6) \qquad b = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a$$

$$(7) \qquad \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

- Jos a on joukon A alkio, niin merkitsemme $a \in A$
- Jos a ei ole joukon A alkio, niin merkitsemme $a \notin A$
- Joukon voi määritellä luettelemalla $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,...,100\}$
- Jos alkioita on paljon, käytämme notaatiota Joukko $= \{$x $\in$ perusjoukko $|$ ehto$\}$
- Esimerkiksi nollan ja yhden välissä olevien reaalilukujen joukko on $F = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$
- Jos kahdella joukolla A ja B on täsmälleen samat alkiot, ne ovat *identtiset* ja merkitsemme $A = B$. Muussa tapauksessa $A \neq B$

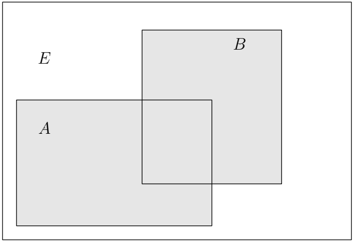
- Jos jokainen A:n alkio on myös B:n alkio, niin sanomme että A on B:n osajoukko ja merkitsemme $A \subseteq B$
- Jos A on B:n osajoukko ja B:ssä on alkio, jota ei ole A:ssa, niin sanomme, että A on B:n aito osajoukko ja merkitsemme $A \subset B$
- Tyhjä joukko $\emptyset = \{\ \}$ on joukko, jossa ei ole yhtään alkiota.

Perusjoukot

- $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ = luonnollisten lukujen joukko
- $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1,0,1,2,...\}$ = kokonaislukujen joukko
- $\mathbb{Q} = \{x|x = m/n, n \neq 0, m,n \in Z\}$ = rationaalilukujen joukko
- $\mathbb{R}$ = reaalilukujen joukko
- $\mathbb{C}$ = kompleksilukujen joukko

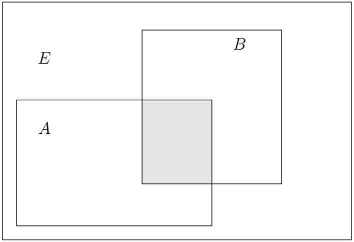
Joukkojen A ja B **yhdiste** (union) on joukko

$$A \cup B = \{x \in E | x \in A \text{ tai } x \in B\}.$$



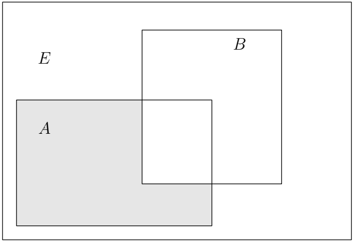
Joukkojen A ja B **leikkaus** (intersection) on joukko

$$A \cap B = \{x \in E | x \in A \text{ ja } x \in B\}.$$



Joukkojen A ja B **erotus** (difference) on joukko

$$A \setminus B = \{x \in E | x \in A \text{ ja } x \notin B\}.$$



Joukon A **komplementti** (complement) on joukko

$$\overline{A} = \{x \in E | x \notin A\}.$$