Pienimmän neliösumman menetelmä (PNS)

Perusongelman kuvaus 1

Tarkastellaan neljää pitkää aikasarjaa

$$
\begin{aligned}
\vec{q}_1 &= (q_{11}, q_{21}, \dots, q_{10,1})^T, \\
\vec{q}_2 &= (q_{12}, q_{22}, \dots, q_{10,2})^T, \\
\vec{q}_3 &= (q_{13}, q_{23}, \dots, q_{10,3})^T, \text{ ja} \\
\\
\vec{p}_1 &= (p_{11}, p_{21}, \dots, p_{10,1})^T.
\end{aligned}
$$

Perusongelman kuvaus 1

Tarkastellaan neljää pitkää aikasarjaa

$$
\begin{aligned}
\vec{q}_1 &= (q_{11}, q_{21}, \ldots, q_{10,1})^T, \\
\vec{q}_2 &= (q_{12}, q_{22}, \ldots, q_{10,2})^T, \\
\vec{q}_3 &= (q_{13}, q_{23}, \ldots, q_{10,3})^T, \text{ ja} \\
\\
\vec{p}_1 &= (p_{11}, p_{21}, \ldots, p_{10,1})^T.
\end{aligned}
$$

q-aikasarjat ovat kolmen osittain toisiaan korvaavien raaka-aineiden 1, 2 ja 3 myydyt määrät päivittäin kymmenen päivän aikana ja

Tarkastellaan neljää pitkää aikasarjaa

$$\begin{aligned}
\vec{q}_1 &= (q_{11}, q_{21}, \ldots, q_{10,1})^T, \\
\vec{q}_2 &= (q_{12}, q_{22}, \ldots, q_{10,2})^T, \\
\vec{q}_3 &= (q_{13}, q_{23}, \ldots, q_{10,3})^T, \text{ ja} \\
\\
\vec{p}_1 &= (p_{11}, p_{21}, \ldots, p_{10,1})^T.
\end{aligned}$$

q-aikasarjat ovat kolmen osittain toisiaan korvaavien raaka-aineiden 1, 2 ja 3 myydyt määrät päivittäin kymmenen päivän aikana ja

p-aikasarja on raaka-aineen 1 hinta päivittäin kymmenen päivän aikana.

Tarkastellaan neljää pitkää aikasarjaa

$$\begin{aligned}\vec{q}_1 &= (q_{11}, q_{21}, \ldots, q_{10,1})^T, \\ \vec{q}_2 &= (q_{12}, q_{22}, \ldots, q_{10,2})^T, \\ \vec{q}_3 &= (q_{13}, q_{23}, \ldots, q_{10,3})^T, \text{ ja} \\ \\ \vec{p}_1 &= (p_{11}, p_{21}, \ldots, p_{10,1})^T.\end{aligned}$$

q-aikasarjat ovat kolmen osittain toisiaan korvaavien raaka-aineiden 1, 2 ja 3 myydyt määrät päivittäin kymmenen päivän aikana ja

p-aikasarja on raaka-aineen 1 hinta päivittäin kymmenen päivän aikana.

Etsimme sellaista kysyntäfunktiota

$$p_1 = b_1 q_1 + b_2 q_2 + b_3 q_3 + b_4,$$

että mallin antamat arvot hinnalle ovat mahdollisimman lähellä havaittuja arvoja

Siis

$$\begin{cases} b_1 \cdot q_{11} & + & b_2 \cdot q_{12} & + & b_3 \cdot q_{13} & + & b_4 \cdot 1 & = & \hat{p}_{11} \approx p_{11} \\ b_1 \cdot q_{21} & + & b_2 \cdot q_{22} & + & b_3 \cdot q_{23} & + & b_4 \cdot 1 & = & \hat{p}_{21} \approx p_{21} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_1 \cdot q_{10,1} & + & b_2 \cdot q_{10,2} & + & b_3 \cdot q_{10,3} & + & b_4 \cdot 1 & = & \hat{p}_{10,1} \approx p_{10,1} \end{cases}$$

Kertoimet onnistuvat sitä paremmin, mitä pienempi on neliösumma

$$NS = \sum_{j=1}^{10} (\hat{p}_{j1} - p_{j,1})^2.$$

Tästä tulee menetelmän nimi: ”Pienimmän NeliöSumman” menetelmä (PNS). (englaniksi ”Ordinary Least Square” (OLS).)

Perusongelman kuvaus 3

Muotoillaan edellinen yhtälöryhmä matriisikielellä. Sitä varten muodostamme vektoreista $\vec{q}_{11}$, $\vec{q}_{11}$ ja $\vec{q}_{11}$ sekä ykösvektorista $\vec{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T$. matriisit

$$V = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{10,1} & q_{10,2} & q_{10,3} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad W = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & 1 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{10,1} & q_{10,2} & q_{10,3} & 1 \end{pmatrix}$$

Näillä merkinnöillä etsimme vektoria $\vec{b}$

$$W\vec{b} = \hat{\vec{p}}_1 \approx \vec{p}_1, \qquad NS = |\hat{\vec{p}}_1 - \vec{p}_1|^2 = |W\vec{b} - \vec{p}_1|^2$$

niin, että NS on niin pieni kuin mahdollista.

Kahden vektorin $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$ ja $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$ pistetulo on

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n$$

ja vektorin $\vec{u}$ pituus on

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Kahden vektorin $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$ ja $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$ pistetulo on

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n$$

ja vektorin $\vec{u}$ pituus on

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Kaksi vektoria ovat kohtisuorassa, jos niiden pistetulo on nolla

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Pistetulonmääritelmästä seuraa välittömästi, että

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+\cdots+a_n(b_n+c_n)\\ &= a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+\cdots+a_nb_n+a_nc_n)\\ &= \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.\end{aligned}$$

Pistetulonmääritelmästä seuraa välittömästi, että

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+\cdots+a_n(b_n+c_n)\\ &= a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+\cdots+a_nb_n+a_nc_n)\\ &= \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.\end{aligned}$$

Edellisen seurauksena saamme klassisen lauseen

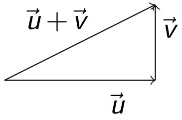
Pistetulonmääritelmästä seuraa välittömästi, että

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+\cdots+a_n(b_n+c_n)\\ &= a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+\cdots+a_nb_n+a_nc_n)\\ &= \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.\end{aligned}$$

Edellisen seurauksena saamme klassisen lauseen

(Pythagoran lause I.) Jos vektorit $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ ovat kohtisuorassa, niin

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$$



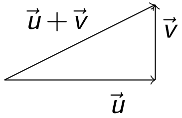
Pistetulonmääritelmästä seuraa välittömästi, että

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+\cdots+a_n(b_n+c_n)\\ &= a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+\cdots+a_nb_n+a_nc_n)\\ &= \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.\end{aligned}$$

Edellisen seurauksena saamme klassisen lauseen

(Pythagoran lause I.) Jos vektorit $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ ovat kohtisuorassa, niin

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$$



Perustelu on suora lasku

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{u}}_{=|\vec{u}|^2}+\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v}}_{=0}+\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{u}}_{=0}+\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{v}}_{=|\vec{v}|^2}$$

Matriisin Pseudoinverssi

(Moore-Penrose)

Tarkastellaan uudelleen alkuperäisen ongelman kaltaista mutta yksinkertaisempaa ongelmaa

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}}$$

Tarkastellaan uudelleen alkuperäisen ongelman kaltaista mutta yksinkertaisempaa ongelmaa

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}}$$

Jos olemme varmoja siitä, että yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, ja $A^T A$ on säännöllinen, niin yhtälöryhmän ratkaisu saadaan laskettua kaavalla

$$\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

Matriisin Pseudoinverssi 6
(Moore-Penrose)

Tarkastellaan uudelleen alkuperäisen ongelman kaltaista mutta yksinkertaisempaa ongelmaa

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}}$$

Jos olemme varmoja siitä, että yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, ja A^TA on säännöllinen, niin yhtälöryhmän ratkaisu saadaan laskettua kaavalla

$$\vec{x} = (A^TA)^{-1}A^T\vec{b}$$

Perustelu:

$$(A^TA)^{-1}A^T\underbrace{\vec{b}}_{=A\vec{x}} = (A^TA)^{-1}(A^TA)\vec{x} = \vec{x}$$

Jos matriisi $A^T A$ on säännöllinen, niin sanomme, että matriisin A pseudoinverssi (Moore-Penrosen pseudoinverssi) on

$$A^{\dagger} = (A^T A)^{-1} A^T$$

Jos matriisi $A^T A$ on säännöllinen, niin sanomme, että matriisin A pseudoinverssi (Moore-Penrosen pseudoinverssi) on

$$A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$$

Jos A on säännöllinen neliömatriisi, niin $A^\dagger = A^{-1}$.

Matriisin Pseudoinverssi
(Moore-Penrose)

Jos matriisi $A^T A$ on säännöllinen, niin sanomme, että matriisin A pseudoinverssi (Moore-Penrosen pseudoinverssi) on

$$A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$$

Jos A on säännöllinen neliömatriisi, niin $A^\dagger = A^{-1}$.

Jos $A^\dagger$ on olemassa, niin $A^\dagger A = I$.

Esimerkki 1. Ratkaistaan pseudoinverssin avulla edellä esiintynyt yhtälöryhmä

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}}$$

```
octave:2> A=[2 4; -1 2; 3,-1];
octave:3> b=[2; -5; 10];
octave:4> x=(A'*A)^(-1)*A'*b
x =
    3.0000
   -1.0000
```

Esimerkki 2. Jos yritämme ratkaista yhtälöryhmää

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}},$$

niin osoittautuu, ettei täsmällistä ratkaisua ole olemassa!

Esimerkki 2. Jos yritämme ratkaista yhtälöryhmää

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}},$$

niin osoittautuu, ettei täsmällistä ratkaisua ole olemassa! Seuraavaksi pyrimme löytämään sellaisen vektorin $\vec{x}$, että

$$|A\vec{x} - \vec{b}|^2$$

tulee niin pieneksi kuin mahdollista.

Esimerkki 2. Jos yritämme ratkaista yhtälöryhmää

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}},$$

niin osoittautuu, ettei täsmällistä ratkaisua ole olemassa! Seuraavaksi pyrimme löytämään sellaisen vektorin $\vec{x}$, että

$$|A\vec{x} - \vec{b}|^2$$

tulee niin pieneksi kuin mahdollista.
Ratkaisu on $\vec{x} = A^{\dagger}\vec{b}$. Perustelemme asian seuraavassa.

Väite: Lauseke $|A\vec{x}-\vec{b}|^2$ saa pienimmän arvonsa, kun $\vec{x}=A^\dagger\vec{b}$.

Perustelu: Olkoon $\vec{w}\neq\vec{x}$ jokin toinen ratkaisuehdokas. Nyt

$$|A\vec{w}-\vec{b}|^2 \;=\; |\underbrace{(A\vec{w}-A\vec{x})}_{=\vec{u}}+\underbrace{(A\vec{x}-\vec{b})}_{=\vec{v}}|^2$$

Matriisin Pseudoinverssi (Moore-Penrose)

Väite: Lauseke $|A\vec{x} - \vec{b}|^2$ saa pienimmän arvonsa, kun $\vec{x} = A^\dagger \vec{b}$.

Perustelu: Olkoon $\vec{w} \neq \vec{x}$ jokin toinen ratkaisuehdokas. Nyt

$$|A\vec{w} - \vec{b}|^2 = |\underbrace{(A\vec{w} - A\vec{x})}_{=\vec{u}} + \underbrace{(A\vec{x} - \vec{b})}_{=\vec{v}}|^2$$

Suora lasku osoittaa, että vektorit $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ ovat kohtisuorassa

$$\begin{aligned}\vec{u}^T\vec{v} &= (A(\vec{w} - \vec{x}))^T(A(A^TA)^{-1}A^T\vec{b} - \vec{b}) \\ &= (\vec{w} - \vec{x})^T\{A^TA(A^TA)^{-1}A^T\vec{b} - A^T\vec{b}\} = 0\end{aligned}$$

Väite: Lauseke $|A\vec{x}-\vec{b}|^2$ saa pienimmän arvonsa, kun $\vec{x}=A^\dagger\vec{b}$.

Perustelu: Olkoon $\vec{w}\neq\vec{x}$ jokin toinen ratkaisuehdokas. Nyt

$$|A\vec{w}-\vec{b}|^2 \quad = \quad |\underbrace{(A\vec{w}-A\vec{x})}_{=\vec{u}}+\underbrace{(A\vec{x}-\vec{b})}_{=\vec{v}}|^2$$

Suora lasku osoittaa, että vektorit $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ ovat kohtisuorassa

$$\begin{aligned}\vec{u}^T\vec{v} &= (A(\vec{w}-\vec{x}))^T(A(A^TA)^{-1}A^T\vec{b}-\vec{b}) \\ &= (\vec{w}-\vec{x})^T\{A^TA(A^TA)^{-1}A^T\vec{b}-A^T\vec{b}\}=0\end{aligned}$$

Pythagoran lauseen mukaan siis

$$|A\vec{w}-\vec{b}|^2 \quad = \quad |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|A\vec{x}-\vec{b}|^2$$

$\therefore$ $\vec{x}=A^\dagger\vec{b}$ on kaikista ehdokkaista NeliöSumman kannalta paras.

Haetaan esimerkin 2 yhtälöryhmälle pienimmän neliösumman ratkaisu

```
octave:2> A = [2 4; -1 2; 3 -1];
octave:3> b = [2; -5; 5];
octave:4> x = (A'*A)^(-1)*A'*b
x =
    1.84211
   -0.59649

octave:5> A*x
ans =
    1.2982
   -3.0351
    6.1228
```

Tarkastellaan uudelleen kolmen tuotteen myynti- ja hinta-aikasarjoja

$$
\begin{aligned}
\vec{q}_1 &= (q_{11}, q_{21}, \ldots, q_{10,1})^T, \\
\vec{q}_2 &= (q_{12}, q_{22}, \ldots, q_{10,2})^T, \\
\vec{q}_3 &= (q_{13}, q_{23}, \ldots, q_{10,3})^T, \text{ ja} \\
\vec{p}_1 &= (p_{11}, p_{21}, \ldots, p_{10,1})^T, \\
\vec{p}_2 &= (p_{12}, p_{22}, \ldots, p_{10,2})^T, \\
\vec{p}_3 &= (p_{13}, p_{23}, \ldots, p_{10,3})^T.
\end{aligned}
$$

Tarkastellaan uudelleen kolmen tuotteen myynti- ja hinta-aikasarjoja

$$
\begin{aligned}
\vec{q}_1 &= (q_{11}, q_{21}, \ldots, q_{10,1})^T, \\
\vec{q}_2 &= (q_{12}, q_{22}, \ldots, q_{10,2})^T, \\
\vec{q}_3 &= (q_{13}, q_{23}, \ldots, q_{10,3})^T, \text{ ja} \\
\vec{p}_1 &= (p_{11}, p_{21}, \ldots, p_{10,1})^T, \\
\vec{p}_2 &= (p_{12}, p_{22}, \ldots, p_{10,2})^T, \\
\vec{p}_3 &= (p_{13}, p_{23}, \ldots, p_{10,3})^T.
\end{aligned}
$$

Muodostetaan vastaavat matriisit

$$
Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{10,1} & q_{10,2} & q_{10,3} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{10,1} & p_{10,2} & p_{10,3} \end{pmatrix}
$$

Kysyntäfunktion estimointi. 13

$$W = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & 1 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{10,1} & q_{10,2} & q_{10,3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & 1 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{10,1} & q_{10,2} & q_{10,3} & 1 \end{pmatrix}$$

Etsimme sellaista kysyntäfunktiota

$$q_{k1} b_{1j} + q_{k2} b_{2j} + q_{k3} b_{3j} + 1 \cdot b_{4j} = p_{kj},$$

että mallin antamat arvot hinnalle ovat mahdollisimman lähellä havaittuja arvoja

$$W = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & 1 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{10,1} & q_{10,2} & q_{10,3} & 1 \end{pmatrix}$$

Etsimme sellaista kysyntäfunktiota

$$q_{k1}b_{1j} + q_{k2}b_{2j} + q_{k3}b_{3j} + 1 \cdot b_{4j} = p_{kj},$$

että mallin antamat arvot hinnalle ovat mahdollisimman lähellä havaittuja arvoja eli

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & 1 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{10,1} & q_{10,2} & q_{10,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{10,1} & p_{10,2} & p_{10,3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & 1 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{10,1} & q_{10,2} & q_{10,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{10,1} & p_{10,2} & p_{10,3} \end{pmatrix}$$

PNS-mielessä parhaat kertoimet malliin saadaan kaavalla

$$B = W^{\dagger} P$$