

Yhtälöryhmän ratkaisujen lukumäärä, L26

Kvadraattinen yhtälöryhmä

Kvadraattinen homogeeninen YR

Vapaa tai sidottu matriisi

Vapauden tutkiminen

Yhteenvetoa

Aiheet

Kvadraattinen
yhtälöryhmä

Kvadraattinen
homogeeninen YR

Vapaa tai sidottu
matriisi

Vapauden
tutkiminen

Yhteenvetoa

Aiheet

Kvadraattinen
yhtälöryhmäKvadraattinen
homogeeninen YRVapaa tai sidottu
matriisiVapauden
tutkiminen

Yhteenveto

Haluamme ratkaista yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 4x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 5 \\ -2x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Yhtälöryhmä on kvadraattinen, koska kerroinmatriisi on neliömatriisi.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ratkaisujen olemassaoloa ja lukumäärää voidaan tutkia kerroinmatriisin determinantin avulla.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= +4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4(2 \cdot 2 - 1 \cdot 2) - (1 \cdot 2 - 1 \cdot (-2)) - (1 \cdot 2 - 2 \cdot (-2)) \\ &= 8 - 4 - 6 = -2 \end{aligned}$$

Aiheet

Kvadraattinen
yhtälöryhmäKvadraattinen
homogeeninen YRVapaa tai sidottu
matriisiVapauden
tutkiminen

Yhteenvetoa

Lause 1: Kun kvadraattisen yhtälöryhmän kerroinmatriisin determinantti on erisuuri kuin nolla, niin yhtälöryhmällä on yksi yksikäsitteinen ratkaisu.

Esimerkin tapauksessa on siis olemassa yksikäsitteinen ratkaisu, joka voidaan ratkaista

- ▶ rivioperaatioin,
- ▶ tai käänteismatriisia käyttäen,
- ▶ tai Cramerin kaavoilla.

Aiheet

Kvadraattinen
yhtälöryhmä

Kvadraattinen
homogeeninen YR

Vapaa tai sidottu
matriisi

Vapauden
tutkiminen

Yhteenvetoa

Haluamme ratkaista yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 4x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Homogeenisella yhtälöryhmällä on aina triviaali ratkaisu $x = 0, y = 0, z = 0$.

Koska kerroinmatriisi on sama kuin edellisessä esimerkissä, tiedämme että $\det(A) = -2 \neq 0$, joten yhtälöryhmän ratkaisu on yksikäsitteinen.

Ei siis ole olemassa muuta ratkaisua, kuin triviaali

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

Aiheet

Kvadraattinen
yhtälöryhmä

Kvadraattinen
homogeeninen YR

Vapaa tai sidottu
matriisi

Vapauden
tutkiminen

Yhteenveto

Haluamme ratkaista yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 4x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nyt kerroinmatriisin determinantti on 0, joten löytyy ei-triviaali ratkaisu, joka voidaan ratkaista

- ▶ rivioperaatioilla
- ▶ tai asettamalla yhdelle muuttujalle arvo (esim. $z = 1$) ja ratkaisemalla näinsaatu (**ei-kvadraattinen**) yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 4x + y - 1 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = 1 \\ x + 2y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

Seuraavan määritelmän alakohdat 1,2,3 ovat keskenään yhtäpitävät:

Mää:(a) Matriisi A on lineaarisesti riippuva (sidottu), jos

1. jokin matriisin sarake voidaan muuttaa sarake-operaatioilla nollasarakkeeksi. (Jokin sarake voidaan lausua muiden sarakkeiden lineaarikombinaationa), tai
2. jokin transpoosin A^T rivi voidaan muuttaa rivi-operaatioilla nollariviksi, tai
3. $A\vec{x} = \vec{0}$, jollakin ei-triviaalilla vektorilla \vec{x} .

(b) Matriisi A on lineaarisesti riippumaton (eli vapaa), jos se ei ole lineaarisesti riippuva (eli ei ole sidottu).

Aiheet

Kvadraattinen
yhtälöryhmä

Kvadraattinen
homogeeninen YR

Vapaa tai sidottu
matriisi

Vapauden
tutkiminen

Yhteenvetoa

Lause 2: Neliömatriisi A on vapaa, jos ja vain jos sen determinantti ei ole nolla ($\det(A) \neq 0$).

Lause 3: (a) Jos yhtälöryhmällä $A\vec{x} = \vec{b}$ on enemmän kuin yksi ratkaisu (kaksi tai enemmän), niin kerroinmatriisi on sidottu.

(b) Jos yhtälöryhmän $A\vec{x} = \vec{b}$ kerroinmatriisi on vapaa, niin ryhmällä on korkeintaan yksi ratkaisu. (Yksi ratkaisu tai $R_j = \emptyset$.)

Perustelu: Jos löytyy kaksi erilaista ratkaisua \vec{u} ja \vec{v} , niin niiden erotus $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ on ei-triviaali vektori ja

$$A\vec{w} = A(\vec{u} - \vec{v}) = A\vec{u} - A\vec{v} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

joten A on määritelmän nojalla sidottu.

Aiheet

Kvadraattinen
yhtälöryhmäKvadraattinen
homogeeninen YRVapaa tai sidottu
matriisiVapauden
tutkiminen

Yhteenveto

Lause 4: $m \times n$ matriisin A vapaus vapaus voidaan tutkia seuraavasti:

- (1) Jos $m < n$ (rivejä vähemmän kuin sarakkeita), niin matriisi on sidottu.
- (2) Jos $m = n$ (A on neliömatriisi), niin A on vapaa, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$.
- (3) Jos $m > n$ (rivejä enemmän kuin sarakkeita), niin A on vapaa, jos ja vain jos $\det(A^T A) \neq 0$.

Perustelu

$$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow A^T A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}^T A^T A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{(A\vec{x})^T A\vec{x}}_{=\|A\vec{x}\|^2} = \vec{0} \Rightarrow A\vec{x} = \vec{0}$$

Siis $A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A^T A\vec{x} = \vec{0}$, eli A on sidottu, jos ja vain jos $A^T A$ on sidottu. Mutta $A^T A$ on neliömatriisi, jonka vapaus voidaan tutkia kohdan (2) mukaisesti.

Aiheet

Kvadraattinen
yhtälöryhmä

Kvadraattinen
homogeeninen YR

Vapaa tai sidottu
matriisi

Vapauden
tutkiminen

Yhteenveto

Tarkastellaan yhtälöryhmää $A\vec{x} = \vec{b}$. Muodostetaan täydennetty (augmented) apumatriisi W siten, että yhtälöryhmän RHS lisätään viimeiseksi sarakkeeksi A :n sarakkeiden jälkeen.

Esimerkki

$$\begin{cases} 4x + y = 7 \\ x + 2y = 7 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad W = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 7 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aiheet

Kvadraattinen
yhtälöryhmäKvadraattinen
homogeeninen YRVapaa tai sidottu
matriisiVapauden
tutkiminen

Yhteenvetoa

Lause 5: Tarkastellaan yhtälöryhmää $A\vec{x} = \vec{b}$, jonka täydennetty (augmented) kerroinkaavio on W , niin

(1) Jos A on vapaa, niin ryhmällä on enintään yksi ratkaisu.

(2) Jos A on vapaa ja W on sidottu, niin ryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, joka saadaan kvadraattiselle ryhmälle kaavalla

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

ja ei-kvadraattiselle ryhmälle kaavalla

$$\vec{x} = A^\dagger \vec{b} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

(3) Jos A on vapaa ja W on vapaa, niin ryhmällä ei ole tarkkaa ratkaisua, mutta pienimmän neliösumman approksimaatio (PNS-ratkaisu) saadaan kaavalla

$$\vec{x} = A^\dagger \vec{b} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

Aiheet

Kvadraattinen
yhtälöryhmä

Kvadraattinen
homogeeninen YR

Vapaa tai sidottu
matriisi

Vapauden
tutkiminen

Yhteenvetoa