Voitonmaksimointi esimerkkejä, L9

Esimerkki 1

Esimerkki 2

Esimerkki 3

Esimerkki 1 (1)

Yritys Valmistaa kuukaudessa q tuotetta. Kysyntäfunktio on

$$p = 15 - 0,05q$$

ja kustannusfunktio on

$$C(q) = 350 + 2q + 0,05q^2.$$

a) Yritys valmistaa nyt tuotteita kuukaudessa määrän $q = 100$. Mikä on silloin hinta, ja mikä on silloin voitto?

b) Mikä on optimaalinen tuotantomäärä, ja mikä on voitto, kun tuotantomäärä on optimaalinen?

Esimerkki 1 (2)

$p = 25 - 0,05q, \quad C(q) = 350 + 2q + 0,05q^2$

a) Jos yritys valmistaa nyt 100 tuotetta kuukaudessa, niin kysyntäfunktion mukaan myyntihinta on
$p = 15 - 0,05 \cdot 100 = 10,00(€/\text{kpl})$

Silloin myynnistä saatava tuotto on

$$R(100) = 100\frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 10,00\frac{€}{\text{kpl}} = 1000,00\frac{€}{\text{kk}}$$

Kun yritys valmistaa 100 tuotetta kuukaudessa, niin valmistuskustannukset ovat

$$\begin{aligned} C(100) &= 350 + 2 \cdot 100 + 0,05 \cdot 100^2 \\ &= 350 + 200 + 500 = 1050,00\frac{€}{\text{kk}} \end{aligned}$$

Silloin voitto on

$$P(100) = R(100) - C(100) = (1000,00 - 1050,00)\frac{€}{\text{kk}} = -50,00\frac{€}{\text{kk}}$$

Esimerkki 1 (3)

$p = 15 - 0,05q, \quad C(q) = 350 + 2q + 0,05q^2.$

b) Seuraavaksi selvitämme optimaalisen tuotantomäärän. Sitävarten tarvitsemme rajatuoton $MR(q) = \frac{d}{dq}R(q)$ ja rajakustannuksen $MC(q) = \frac{d}{dq}C(q)$.

Rajatuotto perustuu kysyntään:

$$\begin{aligned} p &= 15 - 0,05q \\ \longrightarrow R(q) &= q \cdot p = q(15 - 0,05q) = 15q - 0,05q^2 \\ \longrightarrow MR(q) &= \frac{d}{dq}\left(15q - 0,05q^2\right) = 15 - 0,10q \end{aligned}$$

Rajakustannus on kustannusfunktion derivaatta:

$$\begin{aligned} C(q) &= 350 + 2q + 0,05q^2 \\ \longrightarrow MC(q) &= \frac{d}{dq}\left(350 + 2q + 0,05q^2\right) = 2 + 0,10q \end{aligned}$$

Esimerkki 1 (4)

$p = 15 - 0,05q, \quad R(q) = 15q - 0,05q^2, \quad C(q) = 350 + 2q + 0,05q^2,$
$MR(q) = 15 - 0,10q, \quad MC(q) = 2 + 0,10q.$

Voitto on suurin mahdollinen, kun

$$\begin{aligned} MC &= MR \\ \Leftrightarrow 2 + 0,10q &= 15 - 0,10q \\ \Leftrightarrow 0,20q &= 13 \quad | * 5 \\ \Leftrightarrow q_{opt} &= 65 \end{aligned}$$

Voitto on silloin:

$$\begin{aligned} P(q_{opt}) &= P(65) = R(65) - C(65) \\ &= (15 \cdot 65 - 0,05 \cdot 65^2) - (350 + 2 \cdot 65 + 0,05 \cdot 65^2) \\ &= (975 - 211,25) - (350 + 130 + 211,25) = 72,50€/kk \end{aligned}$$

Voitto on nyt positiivinen.

Lähtötilanteessa (a-kohta)myynti (tuotto) oli 1000€/kk ja voitto, eli kate, oli $-5,0\%$ myynnistä

$$\frac{P(100)}{R(100)} \cdot 100\% = \frac{-50,00€/\text{kk}}{1000,00€/\text{kk}} \cdot 100\% = -5,0\%$$

Optimissa (b-kohta) myynti (tuotto) on
$R(65) = (15 \cdot 65 - 0,05 \cdot 65^2) = 975 - 211,25 = 763,75€/\text{kk}$.
Silloin voitto, eli kate, on myynnistä

$$\frac{P(65)}{R(65)} \cdot 100\% = \frac{72,50€/\text{kk}}{763,75€/\text{kk}} \cdot 100\% = 9,5\%$$

Yritys valmistaa tuotetta kuukaudessa määrän $q = 150\,(\text{kpl/kk})$ ja saa koko tuotannon myytyä, jos hinta on $p = 18,00\,(€/\text{kpl})$. Kysynnän hintajousto on $\varepsilon = -3,00$. Kustannusfunktio on

$$C(q) = 500 + 12,00q + 0,010q^2.$$

a) Laske voitto.
b) Maksimoi voitto, kun kysyntäfunktio mallinnetaan lineaarisena.

a) Laske voitto nyt.
Tuotto on nyt:

$$R(150) = 150\frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 18,00\frac{€}{\text{kpl}} = 2700\frac{€}{\text{kk}}$$

Kustannukset ovat nyt:

$$\begin{aligned} C(150) &= (500 + 12,00 \cdot 150 + 0,010 \cdot 150^2)\frac{€}{\text{kk}} \\ &= 500 + 1800 + 225 = 2525,00\frac{€}{\text{kk}} \end{aligned}$$

Voitto on nyt:

$$P(150) = R(150) - C(150) = (2700 - 2525,00)\frac{€}{\text{kk}} = 175,00\frac{€}{\text{kk}}$$

b) Ensimmäinen asia nyt on mallintaa kysyntä lineaarisella funktiolla

$$p = a - b \cdot q.$$

Tiedämme tämän hetken arvot p:lle ja q:lle. Sijoittamalla nämä edelliseen yhtälöön saamme uuden toden yhtälön, josta kuitenkaan ei vielä voi ratkaista a:ta ja b:tä:

$$18,00 = a - b \cdot 150,0. \tag{1}$$

Toinen yhtälö saadaan kysynnän hintajoustosta

$$\varepsilon = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}.$$

Tiedämme arvot ε:lle, p:lle ja q:lle. Tutkimme seuraavaksi $\frac{dq}{dp}$:tä.

$$
\begin{aligned}
p &= a - b \cdot q \\
\Leftrightarrow bq &= a - p \quad \mid : b \\
\Leftrightarrow q &= \frac{a}{b} - \frac{1}{b} \cdot p \\
\longrightarrow \frac{dq}{dp} &= \frac{d}{dp}\left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b} \cdot p\right) = -\frac{1}{b}
\end{aligned}
$$

Sijoittamalla saatu derivaatta jouston lausekkeeseen saadaan:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} \\
\longrightarrow -3,00 &= -\frac{1}{b} \cdot \frac{18,00}{150} \\
\Leftrightarrow b &= \frac{18,00}{3,00 \cdot 150,0} = 0,040 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Sijoittamalla näin saatu b:n arvo yhtälöön (1) saadaan arvo a:lle

$$\begin{aligned} 18,00 &= a - 0,04 \cdot 150,0 \\ \Leftrightarrow a &= 18,00 + 0,04 \cdot 150,0 = 24,00. \end{aligned}$$

Kysyntäfunktio on siis:

$$p = 24,00 - 0,04q \quad (€/\text{kpl})$$

Jatko on suoraviivainen:

Rajatuotto:

$$\begin{aligned} R(q) &= q(24,00 - 0,04 \cdot q) \\ &= 24,00 \cdot q - 0,04 \cdot q^2 \\ \rightarrow MR(q) &= \frac{d}{dq}(24,00 \cdot q - 0,04 \cdot q^2) \\ &= 24,00 - 0,08 \cdot q \qquad (3) \end{aligned}$$

Rajakustannus:

$$\begin{aligned} C(q) &= 500 + 12,00q + 0,010q^2 \\ \rightarrow MC(q) &= \frac{d}{dq}(500 + 12,00q + 0,010q^2) \\ &= 12,00 + 0,02 \cdot q \qquad (4) \end{aligned}$$

Voiton maksimointi:

$$\begin{aligned} MC &= MR \\ \Leftrightarrow 12,00 + 0,02 \cdot q &= 24,00 - 0,08 \cdot q \\ \Leftrightarrow 0,10 \cdot q &= 12,00 \quad | * 10 \\ \Leftrightarrow q &= 120,0 \end{aligned}$$

Tuotto on nyt:

$$\begin{aligned} R(q) &= 24,00 \cdot q - 0,04 \cdot q^2 \\ \rightarrow R(120) &= (24,00 \cdot 120 - 0,04 \cdot 120^2)\frac{€}{\text{kk}} \\ &= (2880 - 576)\frac{€}{\text{kk}} = 2304\frac{€}{\text{kk}} \end{aligned}$$

Kustannukset ovat nyt:

$$\begin{aligned} C(120) &= (500 + 12,00 \cdot 120 + 0,010 \cdot 120^2)\frac{€}{\text{kk}} \\ &= 500 + 1440 + 144 = 2084,00\ \frac{€}{\text{kk}} \end{aligned}$$

Voitto on nyt:

$$P(120) = R(120) - C(120) = (2304 - 2084)\ \frac{€}{\text{kk}} = 220,00\frac{€}{\text{kk}}$$

Esimerkki 3 (14)

Yritys valmistaa kappaletavaraa q kappaletta viikossa. Yhden kappaleen materiaali- ja palkkakustannus on 15,00 €/kpl, joten tuotannon määrästä riippuvat muuttuvat kustannukset ovat

$$VC = 15q(€/\text{vko}).$$

Yrityksen kiinteät kustannukset ovat

$$FC = 5800(€/\text{vko}).$$

Lisäksi ahtaiden tuotantotilojen, varastointiongelmien ym. takia kustannusfunktioon tulee epälineaarinen kustannuserä

$$HC = 0.0005q^2(€/\text{vko}).$$

Kokonaiskustannus viikossa on siis

$$C(q) = FC + VC + HC = 5800 + 15,00q + 0,0005q^2.$$

Esimerkki 3 (15)

$C(q) = 5800 + 15,00q + 0,0005q^2$

Tuotteen kysyntäfunktio on $p = (30 - 0,001q)$€/kpl, joten tuottofunktio on

$$R = 30q - 0,001q^2 (€/vko)$$

ja voittofunktio on

$$\begin{aligned} P(q) &= R - C = (30q - 0,001q^2) - (5800 + 15,00q + 0,0005q^2) \\ &= 15q - 0.0015q^2 - 5800(€/vko). \end{aligned}$$

- Piirrä voittofunktion $P(q)$ ja yksikkökustannusfunktion $AC(q) = C(q)/q$ kuvaajat kun $2000 < q < 8000$.
- Mikä on $AC(q)$:n yksikkö?
- Mikä on mielestäsi järkevä tuotannon määrä?

Esimerkki 3

q	P(q)	AC(q)
2000	18200	18,90
2200	19940	18,74
2400	21560	18,62
2600	23060	18,53
2800	24440	18,47
3000	25700	18,43
3200	26840	18,41
3400	27860	18,41
3600	28760	18,41
3800	29540	18,43
4000	30200	18,45
4200	30740	18,48
4400	31160	18,52
4600	31460	18,56
4800	31640	18,61
5000	31700	18,66
5200	31640	18,72
5400	31460	18,77
5600	31160	18,84
5800	30740	18,90
6000	30200	18,97
6200	29540	19,04
6400	28760	19,11
6600	27860	19,18
6800	26840	19,25
7000	25700	19,33
7200	24440	19,41
7400	23060	19,48
7600	21560	19,56
7800	19940	19,64
8000	18200	19,73