Esimerkki 1 (Rehun sekoitus) 1

Karjankasvattaja käyttää luonnosta saadun nurmirehun lisäksi lisäravinnetta 200kg/päivä. Lisäravinne sekoitetaan maissista ja soijasta. Ravinteen ominaisuuksiin vaikuttaa raaka-aineiden proteiini- ja kuitupitoisuudet, jotka ovat seuraavat

	prosenttiosuus		
raaka-aine	proteiini	kuitu	hinta (€/kg)
maissi	9.0%	2.0%	0.30
soija	60.0%	6.0%	0.90

Ravinne sekoitetaan niin, että siinä on vähintään 30% proteiinia ja enintään 5% kuitua. Miten vaatimukset täyttävä ravinne saadaan sekoitettua minimi-kustannuksin?

Päätösmuuttujat ovat

$$x_1 = \text{ maissin käyttö (kg/päivä)}$$
$$x_2 = \text{ soijan käyttö (kg/päivä)}$$

Tavoitefunktio on

$$\text{minimoi } z = 0.30x_1 + 0.90x_2$$

Rajoite 1: ravinteessa oltava vähintään 30% proteiinia

$$0.09 \cdot x_1 + 0.60 \cdot x_2 \geq 0.30 \cdot (x_1 + x_2)$$
$$\Leftrightarrow -0.21 \cdot x_1 + 0.30 \cdot x_2 \geq 0$$

Rajoite 2: ravinteessa oltava enintään 5% kuituaa

$$0.02 \cdot x_1 + 0.06 \cdot x_2 \leq 0.05 \cdot (x_1 + x_2)$$
$$\Leftrightarrow -0.03 \cdot x_1 + 0.01 \cdot x_2 \leq 0$$

Rajoite 3: ravinnetta sekoitetaan vähintään 200kg/päivä

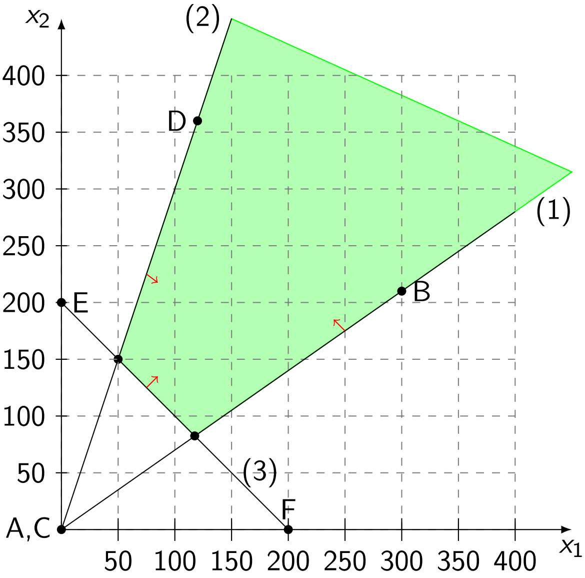
$$x_1 + x_2 \geq 200$$

Muodostetaan LP-malli kokoamalla kaikki yhteen

$$\begin{cases} \text{Minimoi} & z = & 0.30x_1 & + & 0.90x_2 & & \\ \text{ehdoin} & & -0.21x_1 & + & 0.30x_2 & \geq & 0 \\ & & -0.03x_1 & + & 0.01x_2 & \leq & 0 \\ & & x_1 & + & x_2 & \geq & 200 \end{cases}$$

Graafinen ratkaisu:

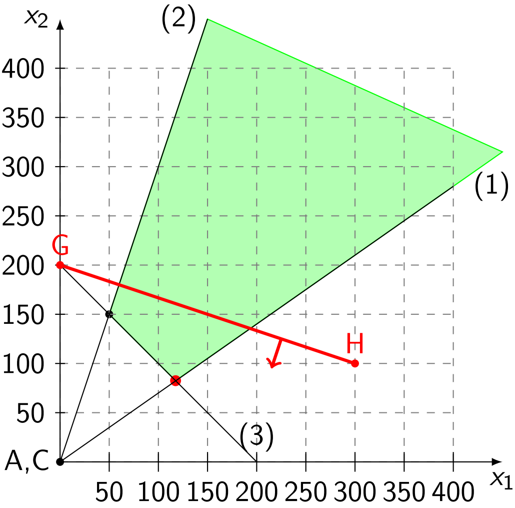
1.raj:	$-0.21x_1 + 0.30x_2 \geq 0$	$\uparrow$ yläp.	A:(0,0)	B:(300,210)
2.raj:	$-0.03x_1 + 0.01x_2 \leq 0$	$\downarrow$ alap.	C:(0,0)	D:(120,360)
3.raj:	$x_1 + x_2 \geq 200$	$\uparrow$ yläp.	E:(0,200)	F:(200,0)



x_2
(2)
400
350
300
250
200
150
100
50
D
E
B
(1)
(3)
F
A,C
50
100
150
200
250
300
350
400
x_1

Tavoitesuora pisteen $(150, 150)$ kautta

$$0.30x_1 + 0.90x_2 = 180, \quad \downarrow \quad G : (0, 200), \quad H : (300, 100)$$



Optimi on siis pisteessä, jossa ensimmäinen (1) ja kolmas (3) rajoitesuora leikkaavat toisiaan.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -0.21x_1 & + & 0.30x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & = & 200 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} *(-10/3) \\ \\ \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 0.7x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & = & 200 \end{array}\right. \left|\begin{array}{r} \leftarrow + \\ *1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 1.7x_1 & & & = & 200 \\ x_1 & + & x_2 & = & 200 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1^* & = & 117.65 \\ x_2^* & = & 82.35 \end{array}\right.$$

Tässä pisteessä tavoitefunktio saa avron

$$z^* = 0.30 \cdot 117.65 + 0.90 \cdot 82.35 = 109.41 € / \text{päivä}.$$

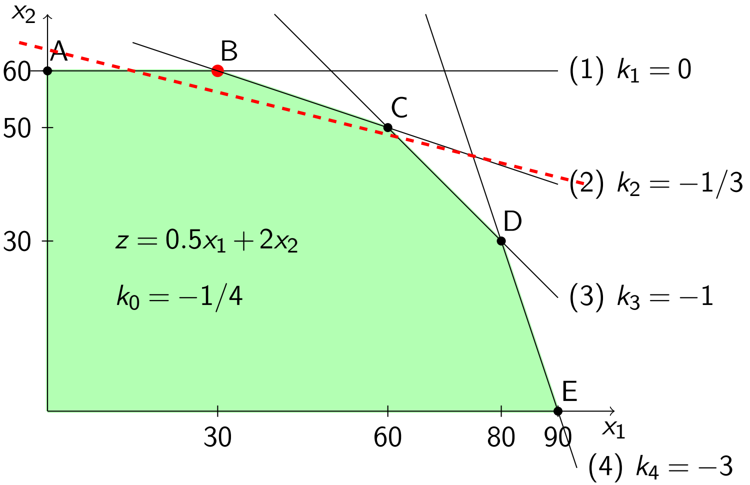
Seuraavassa esimerkissä käypä alue ei muutu, mutta tavoitefunktio käy läpi jatkuvan muutosprosessin.

Esimerkki 2. Yritys valmistaa kahta tuotetta A ja B. Yhdestä A-tuotteesta saatava kate on 0.50(€/kpl) ja yhdestä B-tuotteesta saatava kate on 2.50(€/kpl) Tuotevalintaongelman LP-malli on seuraava

$$\left\{\begin{array}{lrcrcr|l} \max z = & 0.5x_1 & + & 2x_2 & & & k_0 = -1/4 \\ \text{s.t.} & & & x_2 & \leq & 60 & k_1 = 0 \\ & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 210 & k_2 = -1/3 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 110 & k_3 = -1 \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 270 & k_4 = -3 \end{array}\right.$$

Mallin yhteyeen on merkitty myös rajoitesuorien kulmakertoimet. Niitä katsotaan kohta.

Esimerkki 2 (tavoitefunktion muuttuminen)



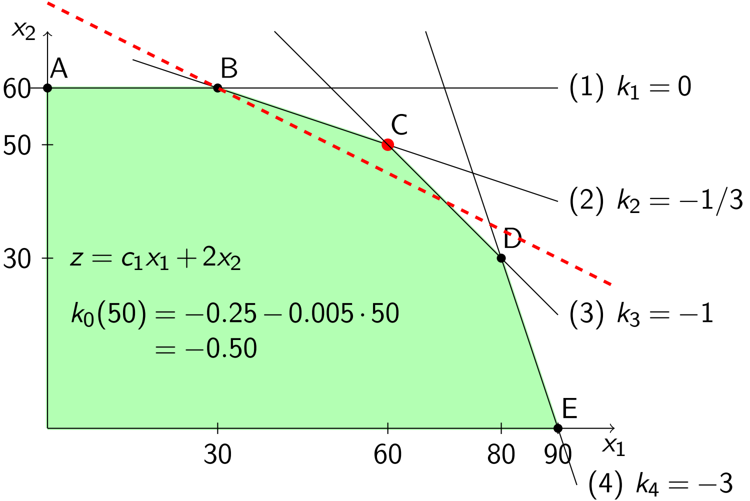
Tuotteen A kate, eli x_1:n kerroin tavoitefunktion lausekkeessa, kasvaa vähitellen siten, että se on ajan funktio

$$c_1(t) = 0.5 + 0.01 \cdot t, \qquad (t \text{ on aika päivissä})$$

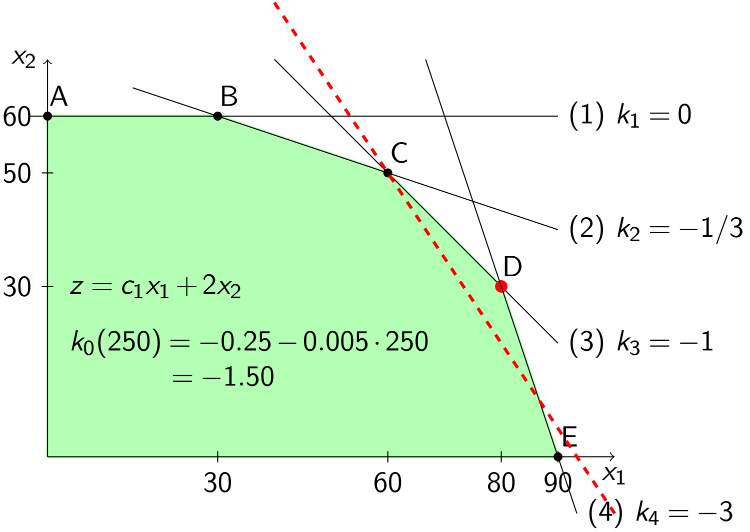
Tavoitesuoran kulmakerroin on silloin myös ajan funktio

$$k_0(t) = \frac{-c_1(t)}{2} = -0.25 - 0.005 \cdot t$$

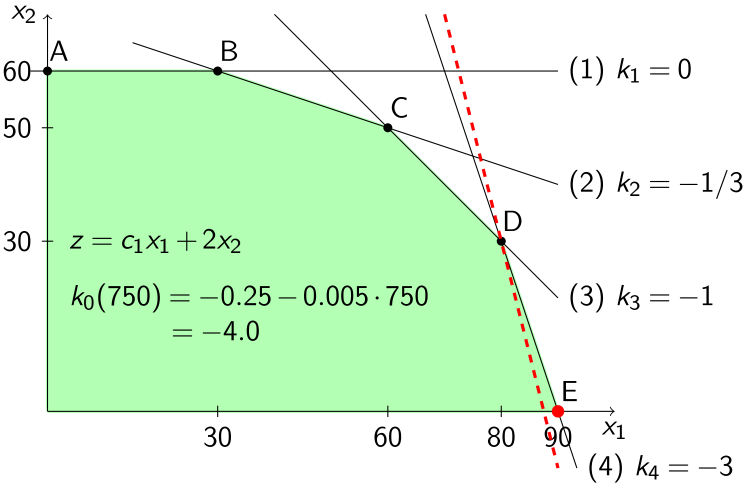
Hetkellä $t = 50$ A:n kate on $c_1(50) = 0.5 + 0.01 \cdot 50 = 1.0$
Tavoitesuoran kulmakerroin on $k_0(50) = -0.5$



Hetkellä $t = 250$ A:n kate on $c_1(250) = 0.5 + 0.01 \cdot 250 = 3.0$
Tavoitesuoran kulmakerroin on $k_0(250) = -1.5$



Hetkellä $t = 750$ A:n kate on $c_1(750) = 0.5 + 0.01 \cdot 750 = 8.0$
Tavoitesuoran kulmakerroin on $k_0(250) = -4.0$



Esimerkki 1 (Rehun sekoitus)
Esimerkki 2 (tavoitefunktion muuttuminen)
Esimerkki 3 (Resurssin muuttuminen)
Esimerkki 4 (Uuden resurssin allokointi)

Optimipisteen siirtyminen pisteestä B pisteeseen C tapahtui, kun

$$\begin{aligned} k_0(t) &= k_2 \\ \Leftrightarrow -0.25 - 0.005 \cdot t &= -0.3333 \\ \Leftrightarrow t &= 16.67 \end{aligned}$$

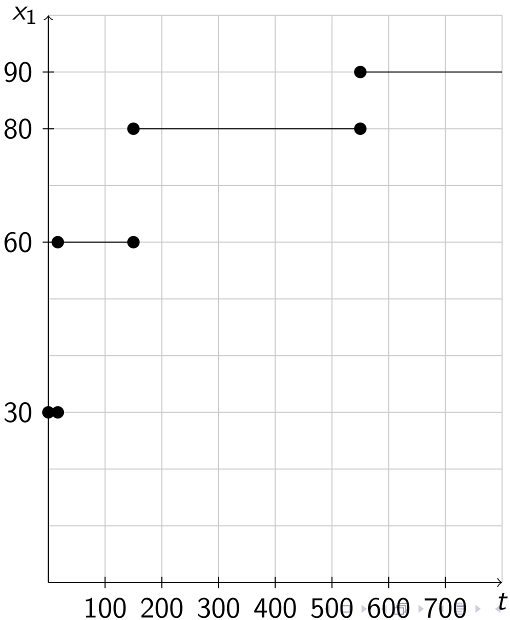
Optimipisteen siirtyminen pisteestä C pisteeseen D tapahtui, kun

$$\begin{aligned} k_0(t) &= k_3 \\ \Leftrightarrow -0.25 - 0.005 \cdot t &= -1 \\ \Leftrightarrow t &= 150 \end{aligned}$$

Optimipisteen siirtyminen pisteestä D pisteeseen E tapahtui, kun

$$
\begin{aligned}
k_0(t) &= k_4 \\
\Leftrightarrow -0.25 - 0.005 \cdot t &= -3 \\
\Leftrightarrow t &= 550
\end{aligned}
$$

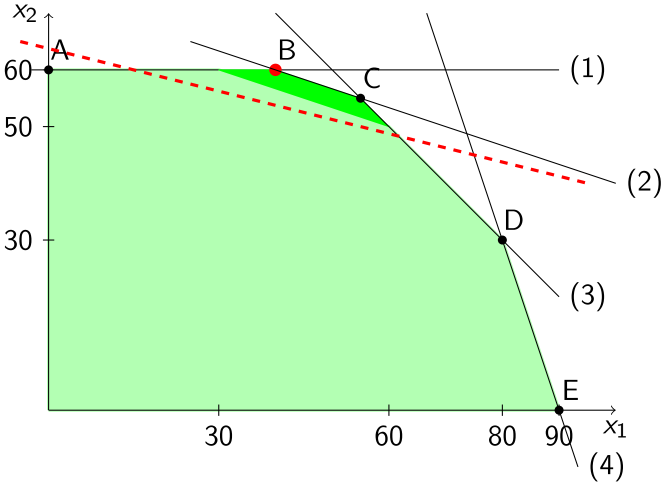
Seuraavaksi piirrämme päätösmuuttujan x_1 optimiarvon ajan funktiona. (Piirros perustuu siis ajatukseen, että A:n kate kasvaa tasaisesti 5 senttiä päivässä.)
Kuvasta näkyy, että tuotantomäärässä tapahtuu äkillisiä muutoksia ja muutosten väliajat tuotantomäärä on muuttumaton.


x_1
90
80
60
30
100
200
300
400
500
600
700
t

Esimerkki 3 (Resurssin muuttuminen) Palataan esimerkin 2 alkutilanteeseen.

Jos toisen rajoitteen RHS muuttuu määrän $\Delta b_2 = 10$, niin toinen rajoitesuora siirtyy oikealle

$$\begin{cases} \max z = & 0.5x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & & & x_2 & \leq & 60 \\ & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 210+10 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 110 \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 270 \end{cases}$$

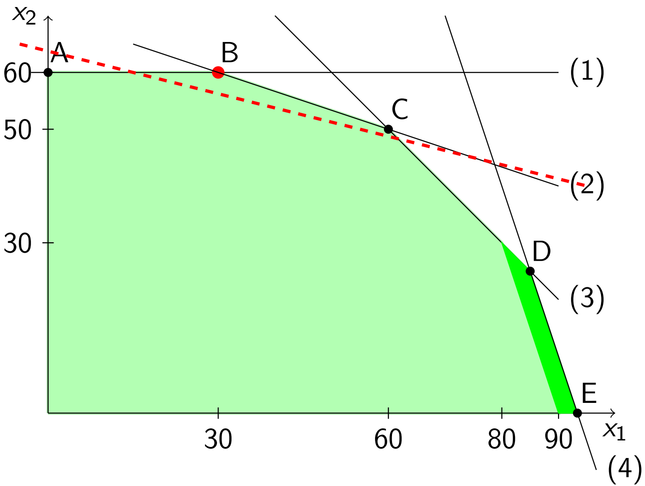


Käypä alue laajeni, päätösmuuttujien arvot muuttuivat ja tavoitefunktion arvo parani.

Esimerkki 3b (Resurssin muuttuminen) Palataan uudelleen esimerkin 2 alkutilanteeseen.

Jos neljännen rajoitteen RHS muuttuu määrän $\Delta b_4 = 10$, niin neljäs rajoitesuora siirtyy oikealle

$$\begin{cases} \max z = & 0.5x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & & & x_2 & \leq & 60 \\ & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 210 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 110 \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 270 + 10 \end{cases}$$



Käypä alue laajeni taas, mutta nyt se ei hyödytä lainkaa.
Optimipiste on edelleen samassa paikassa kuin aluksi!

Esimerkki 4 (Uuden resurssin allokointi)

Yritys valmistaa kahta tuotetta A ja B kahdella osastolla Os1 ja Os2.
A-tuotteen kate on 2€/kpl ja
B-tuotteen kate on 3€/kpl.
Päätösmuuttujat:
x_1 on tuotteen A valmistus (kpl/päivä) ja
x_2 on tuotteen B valmistus (kpl/päivä)
Osastojen työaika-rajoitteet ovat
$2x_1 + x_2 \leq 100$ (h/vko, Os1) ja
$x_1 + 2x_2 \leq 75$ (h/vko, Os2).
Lisäksi on kysyntärajoite $x_1 \leq 45$.

LP-malli

$$
\begin{array}{llrcrcr|l}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{ehdoin} & & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 100 & \text{Os1} \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 75 & \text{Os2} \\
 & & x_1 & & & \leq & 45 & \text{kysyntä}
\end{array}
$$

```
>> c=[2 3];
>> A=[2 1; 1 2; 1 0];
>> b = [100; 75; 45];
>> [x,z] = glpk(c,A,b,[0,0],[],"UUU","CC"
    ,-1)
x =

41.667
16.667

z =  133.33
>>
```

Yritys saa mahdollisuuden palka uuden työntekijän (40h/vko). On ratkaistava mille osastolle uusi työresurssi lisätään.
Merkitään Os1:n osuutta uudesta resurssista x_3:lla ja Os2:n osuutta uudesta resurssista x_4:llä. Silloin saamme optimoitavaksi mallin

$$
\begin{array}{llrcrcl|l}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{ehdoin} & & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 100 + x_3 & \text{Os1} \\
& & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 75 + x_4 & \text{Os2} \\
& & x_1 & & & \leq & 45 & \text{kysyntä} \\
& & & & x_3 + x_4 & = & 40 & \text{lisäresurssi}
\end{array}
$$

Viedään malli järkevään muotoon

$$
\begin{array}{llcccccccccc}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & \\
\text{ehdoin} & & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & \leq & 100 \\
& & x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & \leq & 75 \\
& & x_1 & & & & & & & \leq & 45 \\
& & & & & & x_3 & + & x_4 & = & 40
\end{array}
$$

```
>> c=[2 3 0 0];
>> A=[2 1 -1 1; 1 2 0 -1; 1 0 0 0;0 0 1 1];
>> b = [100;75;45;40];
>> [x,z] = glpk(c,A,b,[0,0,0,0],[],"UUUS","CCCC",-1)
x =
1.66667
56.66667
0.00000
40.00000                          z =   173.33
```

Uusi resurssi sijoitetaan siis kokonaan osasto 2:lle. ($x_3 = 0$, $x_4 = 40$) Valmistusohjelma muuttui aika radikaalisti

$$\begin{cases} x_1 = 41 \\ x_2 = 16 \\ z = 2 \cdot 41 + 3 \cdot 16 = 130 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 56 \\ z = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 56 = 170 \end{cases}$$

jolloin kokonaiskate kasvoi $\frac{170-130}{130} \cdot 100\% = 30.7\%$

Työresurssi kasvoi $\frac{215-175}{175} \cdot 100\% = 22.9\%$