

Tutkitaan LP-mallia

$$\begin{array}{rclcl} \max z = & x_1 & + & 2x_2 & \\ \text{ehdoin} & 3x_1 & + & x_2 & \leq 45 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq 18 \\ & x_1 & + & 4x_2 & \leq 60 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Rajoitteet:

(1)	$3x_1 + x_2 \leq 45$	↓ alap. käypä	$A = (10; 15)$	$B = (15; 0)$
(2)	$x_1 + x_2 \leq 18$	↓ alap. käypä	$C = (0; 18)$	$D = (18; 0)$
(3)	$x_1 + 4x_2 \leq 60$	↓ alap. käypä	$E = (0; 15)$	$F = (20; 10)$

Rajoitteet:

(1)	$3x_1 + x_2 \leq 45$	↓ alap. käypä	$A = (10; 15)$	$B = (15; 0)$
(2)	$x_1 + x_2 \leq 18$	↓ alap. käypä	$C = (0; 18)$	$D = (18; 0)$
(3)	$x_1 + 4x_2 \leq 60$	↓ alap. käypä	$E = (0; 15)$	$F = (20; 10)$

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

Tavoitesuora:

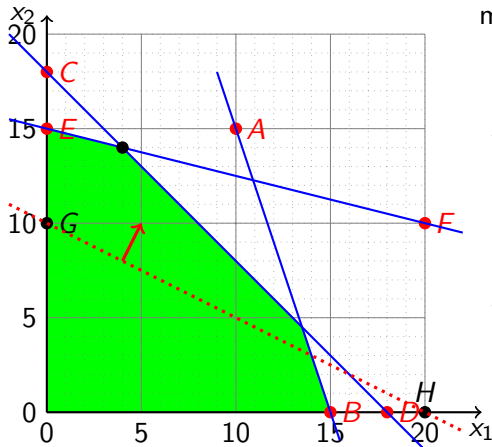
$$x_1 + 2x_2 = 20$$

$$G = (0, 10), H = (20, 0)$$

optimi

$$x_1 = 4, x_2 = 14$$

$$z = 4 + 2 \cdot 14 = 32$$



Tahdomme nyt selvittää: "Miten tavoitefunktion arvo muuttuu, jos jotakin resurssia saadaan yksi yksikkö lisää?"

Tätä varten täydennämme LP-mallin pelivaramuuttujilla s_1 , s_2 ja s_3 , missä s_k kertoo resurssin k käyttämättä jääneen määrän. Täydennetty malli on

$$\begin{array}{rclclcl} \max z = & x_1 & + & 2x_2 & & & \\ \text{ehdoin} & 3x_1 & + & x_2 & + & s_1 & = 45 \\ & x_1 & + & x_2 & & + & s_2 = 18 \\ & x_1 & + & 4x_2 & & & + s_3 = 60 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 & & & & & \geq 0 \end{array}$$

Edellä tehty graafinen tarkastelu osoitti, että käyvän alueen optiminurkka, on toisen ja kolmannen rajoitesuoran leikkauspiste. Tässä pisteessä $s_2 = 0$ ja $s_3 = 0$. Sanomme, että s_2 ja s_3 eivät kuulu optimikantaan.

Kun kantaan kuulumattomat muuttujat jätetään pois, saamme yhtälöt, joista kantamuuttujat ja tavoitefunktion arvo voidaan laskea.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 2x_2 \\ \left\{ \begin{array}{rclcl} 3x_1 & + & x_2 & + & s_1 & = & 45 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 18 \\ x_1 & + & 4x_2 & & & = & 60 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Matriisikielellä:

$$z = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=c} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}}_{=B} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{pmatrix}}_{=x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 45 \\ 18 \\ 60 \end{pmatrix}}_{=b}$$

Nyt siis

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \quad \text{ja} \quad z = c\mathbf{x} = c\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b},$$

ja

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b}, \quad \text{ja} \quad \Delta z = c\Delta\mathbf{x} = c\mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b},$$

Esimerkin tapauksessa siis

$$\begin{aligned}\Delta z &= c\mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b} \\&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \Delta b_3 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & -11/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \Delta b_3 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 0 & 0.6667 & 0.3333 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \Delta b_3 \end{pmatrix} \\&= 0 \cdot \Delta b_1 + 0.6667 \cdot \Delta b_2 + 0.3333 \cdot \Delta b_3\end{aligned}$$

$$\Delta z = 0 \cdot \Delta b_1 + 0.6667 \cdot \Delta b_2 + 0.3333 \cdot \Delta b_3$$

- ▶ Kun ensimmäinen resurssi kasvaa yhdellä, niin tavoitefunktion arvo ei muutu. Ensimmäisen resurssin varjohinta on 0.
- ▶ Kun toinen resurssi kasvaa yhdellä, niin tavoitefunktion arvo kasvaa 0.6667. Toisen resurssin varjohinta on 0.6667.
- ▶ Kun toinen resurssi kasvaa yhdellä, niin tavoitefunktion arvo kasvaa 0.3333. Toisen resurssin varjohinta on 0.3333.

Varjohinnat yleensä ilmoitetaan vektorina

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0.6667 & 0.3333 \end{pmatrix} = \mathbf{cB}^{-1}.$$