

Yhtälöryhmän herkkyys, L22

Aiheet

Yhtälöryhmän
herkkyys

Toinen esimerkki

Esimerkkien
yhteenveto

Yhtälöryhmän herkkyys

Toinen esimerkki

Esimerkkien yhteenveto

Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 5 \\ -2x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=\vec{x}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}_1}$$

ratkaisu on

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jos jonkun yhtälön RHS muuttuu, niin myös ratkaisu muuttuu

Aiheet

Yhtälöryhmän
herkkyys

Toinen esimerkki

Esimerkkien
yhteenveto

Jos kolmannen yhtälön RHS kasvaa arvosta 4 arvoon 5, niin yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu. Uusi ratkaisu on

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 5 \\ -2x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=\vec{x}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}_2}$$

ratkaisu on

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 2 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Yhtälöryhmän
herkkyys

Toinen esimerkki

Esimerkkien
yhteenveto

Muutos ratkaisussa on

$$\Delta \vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 2 \\ 0.75 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.75 \\ 1 \\ -1.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Kun siis yhdenkin yhtälön RHS muuttui, niin jokaisen muuttujan arvo ratkaisussa muuttui!

Jos pienikin muutos yhtälöryhmän RHS-luvuissa saa aikaan suuria muutoksia muuttujien ratkaisu-arvoihin sanomme, että yhtälöryhmä on herkkä. Herkkyydelle on olemassa mitta (kerroinmatriisin kuntoluku), mutta emme opettele sitä nyt.

Toinen esimerkki

Edellisessä esimerkissä muutos RHS:ssä oli melko suuri. Seuraavaksi katsomme vastaavan esimerkin, jossa RHS:n muutos on pienempi (realistisempi, koska pieniä muutoksia on aina).

Olkoon yhtälöryhmän kertoimet samat kuin edellisessä esimerkissä. Alkutilanteen RHS on

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ja lopputilanteen RHS olkoon

$$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4.1 \end{pmatrix} = \vec{b}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Yhtälöryhmän
herkkyys

Toinen esimerkki

Esimerkkien
yhteenvedo

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \Delta \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} = 0.1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \vec{b}_1 + \Delta \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4.1 \end{pmatrix}$$

Laskemme vastaavan muutoksen ratkaisuvektorissa $\vec{x}$:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{x} &= \vec{x}_3 - \vec{x}_1 = A^{-1} \vec{b}_3 - A^{-1} \vec{b}_1 \\ &= A^{-1} (\vec{b}_3 - \vec{b}_1) = A^{-1} \Delta \vec{b} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\Delta \vec{x} = A^{-1} \Delta \vec{b}} \\ &= 0.1 \cdot \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & -0.75 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1.5 & 2 & -1.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.075 \\ 0.1 \\ -0.125 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Yksinkertainen periaate: Tarkastellaan yhtälöryhmää $A\vec{x} = \vec{b}$. Jos k :nnen yhtälön RHS kasvaa yhdellä, niin ratkaisuvektori muuttuu määrällä, joka on kerroinmatriisin käänteismatriisin k :nnes sarake.

Merkitään A :n käänteismatriisin k :tta saraketta vektorilla $\vec{u}_k = (u_{1k} \ u_{2k} \ \dots \ u_{nk})^T$

Täsmällisempi periaate: Tarkastellaan yhtälöryhmää $A\vec{x} = \vec{b}$. Jos yhtälöryhmän RHS kasvaa määrällä $\Delta\vec{b} = (\Delta b_1 \ \Delta b_2 \ \dots \ \Delta b_n)^T$, niin ratkaisuvektori muuttuu määrällä

$$\Delta\vec{x} = A^{-1}\Delta\vec{b} = \Delta b_1\vec{u}_1 + \Delta b_2\vec{u}_2 + \dots \Delta b_n\vec{u}_n$$