

Neliömatriisin adjungaatti, L24

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

$$\text{Matriisi} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

$$\text{Matriisi} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alimatriisi} = \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

$$\text{Matriisi} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alimatriisi} = \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Minori} = \det(\mathbf{A}_{12}) = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 30$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

$$\text{Matriisi} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alimatriisi} = \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Minori} = \det(\mathbf{A}_{12}) = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 30$$

$$\text{Kofaktori} = (-1)^{1+2} \det(\mathbf{A}_{12}) = -30$$

Määritelmä $n \times n$ neliö-matriisin **A** adjungaatti, $\text{Adj}(\mathbf{A})$, on matriisin **A** kofaktorikaavion transpoosi.

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

Määritelmä $n \times n$ neliö-matriisin **A** adjungaatti, $\text{Adj}(\mathbf{A})$, on matriisin **A** kofaktorikaavion transpoosi.

Helppo tapa tehdä adjungaatti yksinkertaisin askelin, on ensin laskea kaikki minorit. Jos $m_{ij} = \text{Det}(A_{ij})$ on matriisin **A** paikkaan i, j liittyvä minori, niin

$$\text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} & \cdots \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} & \cdots \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

Esimerkki 1: Laske adjungaatti matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 1: Laske adjungaatti matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lasketaan ensin minorit

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -12 \quad m_{12} = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 30 \quad m_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -34$$

$$m_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \quad m_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15 \quad m_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -6 \quad m_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = -33 \quad m_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 15$$

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

$$m_{12} = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 30$$

$$m_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -34$$

$$m_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$m_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15$$

$$m_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -6$$

$$m_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = -33$$

$$m_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 15$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

$$\begin{array}{lll}
 m_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -12 & m_{12} = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 30 & m_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -34 \\
 m_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 & m_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15 & m_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \\
 m_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -6 & m_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = -33 & m_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 15
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Adj}(\mathbf{A}) &= \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +(-12) & -(6) & +(-6) \\ -(30) & +(-15) & -(-33) \\ +(-34) & -(1) & +(15) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -12 & -6 & -6 \\ -30 & -15 & 33 \\ -34 & -1 & 15 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

Lasketaan seuraavaksi matriisin \mathbf{A} ja sen adjungaatin $\text{Adj}(\mathbf{A})$ matriisitulo.

$$B = \mathbf{A} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix}$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

Lasketaan seuraavaksi matriisin \mathbf{A} ja sen adjungaatin $\text{Adj}(\mathbf{A})$ matriisitulo.

$$B = \mathbf{A} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix}$$

$$b_{11} = a_{11}m_{11} - a_{12}m_{12} + a_{13}m_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{Det}(\mathbf{A})$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

Lasketaan seuraavaksi matriisiin \mathbf{A} ja sen adjungaatin $\text{Adj}(\mathbf{A})$ matriisitulo.

$$B = \mathbf{A} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix}$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

$$b_{11} = a_{11}m_{11} - a_{12}m_{12} + a_{13}m_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{Det}(\mathbf{A})$$

$$b_{12} = -a_{11}m_{21} + a_{12}m_{22} - a_{13}m_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Lasketaan seuraavaksi matriisiin \mathbf{A} ja sen adjungaatin $\text{Adj}(\mathbf{A})$ matriisitulo.

$$B = \mathbf{A} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix}$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

$$b_{11} = a_{11}m_{11} - a_{12}m_{12} + a_{13}m_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{Det}(\mathbf{A})$$

$$b_{12} = -a_{11}m_{21} + a_{12}m_{22} - a_{13}m_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$b_{13} = a_{11}m_{31} - a_{12}m_{32} + a_{13}m_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$B = \mathbf{A} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix}$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

$$B = \mathbf{A} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix}$$

$$b_{21} = a_{21}m_{11} - a_{22}m_{12} + a_{23}m_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

$$B = \mathbf{A} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix}$$

$$b_{21} = a_{21}m_{11} - a_{22}m_{12} + a_{23}m_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$b_{22} = -a_{21}m_{21} + a_{22}m_{22} - a_{23}m_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{Det}(\mathbf{A})$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

$$B = \mathbf{A} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix}$$

$$b_{21} = a_{21}m_{11} - a_{22}m_{12} + a_{23}m_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$b_{22} = -a_{21}m_{21} + a_{22}m_{22} - a_{23}m_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{Det}(\mathbf{A})$$

$$b_{23} = a_{21}m_{31} - a_{22}m_{32} + a_{23}m_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

$$B = \mathbf{A} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix}$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

$$B = \mathbf{A} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix}$$

$$b_{31} = a_{31}m_{11} - a_{32}m_{12} + a_{33}m_{13} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

$$B = \mathbf{A} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix}$$

$$b_{31} = a_{31}m_{11} - a_{32}m_{12} + a_{33}m_{13} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$b_{32} = -a_{31}m_{21} + a_{32}m_{22} - a_{33}m_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

$$B = \mathbf{A} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix}$$

$$b_{31} = a_{31}m_{11} - a_{32}m_{12} + a_{33}m_{13} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$b_{32} = -a_{31}m_{21} + a_{32}m_{22} - a_{33}m_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$b_{33} = a_{31}m_{31} - a_{32}m_{32} + a_{33}m_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \text{Det}(\mathbf{A})$$

Johtopäätös:

$$\mathbf{A} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \text{Det}(\mathbf{A}) & 0 & 0 \\ 0 & \text{Det}(\mathbf{A}) & 0 \\ 0 & 0 & \text{Det}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = \text{Det}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{I}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} \left(\frac{\text{Adj}(\mathbf{A})}{\text{Det}(\mathbf{A})} \right) = \mathbf{I}$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

Johtopäätös:

$$\mathbf{A} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \text{Det}(\mathbf{A}) & 0 & 0 \\ 0 & \text{Det}(\mathbf{A}) & 0 \\ 0 & 0 & \text{Det}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = \text{Det}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{I}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} \left(\frac{\text{Adj}(\mathbf{A})}{\text{Det}(\mathbf{A})} \right) = \mathbf{I}$$

Eli

Lause: Jos matriisi \mathbf{A} on säännöllinen, eli $\text{Det}(\mathbf{A}) \neq 0$, niin

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(\mathbf{A})} \text{Adj}(\mathbf{A})$$

esimerkki 2: Esimerkin 1 matriisille

$$\begin{aligned}\text{Det}(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= + (2) \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + (3) \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (0 - 12) + (0 + 30) + 3 \cdot (-14 - 20) = -96\end{aligned}$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

esimerkki 2: Esimerkin 1 matriisille

$$\begin{aligned} \text{Det}(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= + (2) \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + (3) \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (0 - 12) + (0 + 30) + 3 \cdot (-14 - 20) = -96 \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{\text{Det}(\mathbf{A})} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A}) = \frac{1}{-96} \begin{pmatrix} -12 & -6 & -6 \\ -30 & -15 & 33 \\ -34 & -1 & 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12/96 & 6/96 & 6/96 \\ 30/96 & 15/96 & -33/96 \\ 34/96 & 1/96 & -15/96 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Kääntematriisi

Cramerin kaavat

Seuraavaksi ratkaisemme yhtälöryhmän (Oletuksella

$$D = \text{Det}(\mathbf{A}) \neq 0)$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

Seuraavaksi ratkaisemme yhtälöryhmän (Oletuksella

$$D = \text{Det}(\mathbf{A}) \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Seuraavaksi ratkaisemme yhtälöryhmän (Oletuksella

$$D = \text{Det}(\mathbf{A}) \neq 0)$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Seuraavaksi ratkaisemme yhtälöryhmän (Oletuksella

$$D = \text{Det}(\mathbf{A}) \neq 0)$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{21} & m_{31} \\ -m_{12} & m_{22} & -m_{32} \\ m_{13} & -m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{21} & m_{31} \\ -m_{12} & m_{22} & -m_{32} \\ m_{13} & -m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{21} & m_{31} \\ -m_{12} & m_{22} & -m_{32} \\ m_{13} & -m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{D} (m_{11}b_1 - m_{21}b_2 + m_{31}b_3) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{21} & m_{31} \\ -m_{12} & m_{22} & -m_{32} \\ m_{13} & -m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{D}(m_{11}b_1 - m_{21}b_2 + m_{31}b_3) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{D}(-m_{12}b_1 + m_{22}b_2 - m_{32}b_3) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{21} & m_{31} \\ -m_{12} & m_{22} & -m_{32} \\ m_{13} & -m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{D}(m_{11}b_1 - m_{21}b_2 + m_{31}b_3) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{D}(-m_{12}b_1 + m_{22}b_2 - m_{32}b_3) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_3 = \frac{1}{D}(m_{13}b_1 - m_{23}b_2 + m_{33}b_3) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

Lause (Cramerin kaavat:) Jos kvadraattisen yhtälöryhmän $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ kerroinkaavio on säännöllinen ($\text{Det}(\mathbf{A}) \neq 0$), niin muuttujan x_k arvo yhtälöryhmän ratkaisussa on

$$x_k = \frac{D_k}{D},$$

missä D on kerroinkaavion determinantti, ja D_k on determinantti kaaviolle, jonka k :s sarake on RHS-vektori \mathbf{b} ja muut sarakkeet ovat samoja kuin kerroinkaaviossa \mathbf{A} .

Esimerkki: Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -x + 3y - z = 6 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6,$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

Esimerkki: Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -x + 3y - z = 6 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6,$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

Esimerkki: Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -x + 3y - z = 6 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -12,$$

Aiheet

Nimityksiä

Adjungaatti

Käänteismatriisi

Cramerin kaavat

Esimerkki: Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -x + 3y - z = 6 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6,$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -12, \quad D_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6,$$

Esimerkki: Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -x + 3y - z = 6 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -12, \quad D_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6,$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-6}{-6} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-12}{-6} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{6}{-6} = -1,$$