Vaasan yliopisto, kevät 2015

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

10. harjoitus, viikko 13 (23.–27.2.2015)

R1	ma	8–10	D115	R5	ti	14–16	C209
R2	ma	14–16	B209	R6	to	10–12	C209
R3	ti	08–10	C209	R7	pe	08–10	D115
R4	ti	12–14	C209	R8	pe	10–12	D115

1. Määritä a) rivioperaatioiden avulla b) adjungaatin avulla käänteismatriisi matriisille

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 2 \ \cdot 1 \ \cdot(-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot \frac{1}{5} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}6 & -0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -0{,}5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot 1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0{,}6 & -0{,}8 & 0 & -0{,}2 \\ 0 & 1 & 0{,}6 & -0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -0{,}5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow \\ \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1{,}4 & -0{,}3 & -0{,}2 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & -1{,}0 & -0{,}5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1{,}4 & -0{,}3 & -0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ -1{,}0 & -0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= +(-1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(2\cdot 3 - (-2)\cdot 4\right) + \left(2\cdot 3 - (-2)\cdot(-1)\right) + 0$$

$$= -(6+8) + (6-2)$$

$$= -10$$

Minorit

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 14 \qquad m_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \qquad m_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 10$$

$$m_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 \qquad m_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \qquad m_{23} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -5$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \qquad m_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \qquad m_{33} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} +(14) & -(-3) & +(2) \\ -(4) & +(-3) & -(2) \\ +(10) & -(-5) & +(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1{,}4 & -0{,}3 & -0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ -1{,}0 & -0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Ratkaise Cramerin kaavoilla yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (4-9) - 3 \cdot (2-6) - (3-4)$$

$$= -5 + 12 + 1$$

$$= 8$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = +5 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}_{=4-9} - 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}_{=0} + (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}_{=6} = -25$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = +1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}_{=0} - 5 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}_{=2-6} + (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} = 20$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = +1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} - 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} + 5 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}_{3-4} = -5$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-25}{8} \approx -3{,}125$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{20}{8} \approx 2{,}500$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{-5}{8} \approx 0{,}625$$

$$V: \begin{cases} x = -3{,}125 \\ y = 2{,}500 \\ z = 0{,}625 \end{cases}$$

(Tarkistus:

$$\frac{-25}{8} + \frac{3 \cdot 20}{8} - \frac{-5}{8} = \frac{40}{8} = 5 \checkmark$$

$$\frac{-25}{8} + \frac{2 \cdot 20}{8} + \frac{3 \cdot (-5)}{8} = \frac{0}{8} = 0 \checkmark$$

$$\frac{2 \cdot (-25)}{8} + \frac{3 \cdot 20}{8} + \frac{2 \cdot (-5)}{8} = \frac{0}{8} = 0 \checkmark$$

)

3. Laske determinantit

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, missä $0 < a \leq 1$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 1\cdot(-3) = 2+3 = \underline{\underline{5}}$

b) $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +a\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} - 0\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} + 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{5\cdot 1 - 1\cdot 3 = 2}$

$= \underline{\underline{2}}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot 2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 2 = \underline{\underline{12}}$

4. Etsi jokin ei-triviaali ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} 3x - 3y + z = 0 \\ \quad\;\; y - z = 0 \\ 3x + 9y - 11z = 0 \end{cases}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & -11 & 0 \end{array}\right) \cdot 1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \end{array}\right) \cdot 12 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\rightarrow \begin{cases} 3x - 3y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = -z & (1) \\ y = z & (2) \end{cases}$ valitaan $\underline{z = 3a}$

$(2) \Rightarrow \underline{y = 3a}$ $\quad (1) \Rightarrow 3x - 9a = -3a$

$3x = 6a$

$\underline{x = 2a}$

V: $\begin{cases} x = 2a \\ y = 3a \\ z = 3a \end{cases}$ $a \neq 0$

5. Kaupungissa on 10 000 taloutta, jossa pyykki pestää käyttäen jotakin kolmesta pesuaineesta "A", "B" tai "C". Pesuaine A on laadukasta ja vastaa hyvin kuluttajien tarpeita. Niistä kuluttajista, jotka edellisellä kerralla ostivat A-paketin 90% ostaa seuraavallakin kerralla A-paketin ja 10% vaihtaa pesuainetta (5% ostaa B-paketin ja 5% ostaa C-paketin). B-pesuaine ei ole yhtä laadukasta kuin A-pesuaine. B-pesuainetta ostaneista 80% pysyy samassa ja 20% vaihtaa merkkiä (10% ostaa A:ta ja 10 % ostaa C:tä). C-pesuaine on heikkolaatuisinta. Sen käyttäjistä vain 50% ostaa samaa pesuainetta seuraavallakin kerralla ja 50% vaihtaa ainetta (25% ostaa A:ta ja 25% ostaa B:tä).
Indeksoidaan tuotteet luonnollisella tavalla: A $\sim$ 1, B $\sim$ 2 ja C $\sim$ 3. Olkoon x_{jk} tuotteen j markkinaosuus "kierroksella" k. Silloin

$$x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} = 10000, \forall k$$

Markkinaosuuksista saadaan osuusvektori

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}$$

Osuusvektorin odotusarvo kierroksella $k+1$ saadaan arvioitujen siirtymä-todennäköisyyksien perusteella lausekkeesta

$$\vec{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{1;k+1} \\ x_{2;k+1} \\ x_{3;k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 & 0{,}25 \\ 0{,}05 & 0{,}80 & 0{,}25 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}50 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{P}} \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\vec{x}_k$$

Pesuaine A on juuri tullut myyntiin ja lähtötilanteen osuusjakauma on $\vec{x}_0 = (0 \quad 7000 \quad 3000)^T$. Laske pesuaineen A markkinaosuus kierroksilla $1, \ldots, 5$. (Jos et laske käsin vaan käytät laskemiseen exceliä, niin laske odotusarvot pidemmälle aikajaksolle, $k = 1, \ldots, 100$.)

$$\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7000 \\ 3000 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 & 0{,}25 \\ 0{,}05 & 0{,}80 & 0{,}25 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1450 \\ 6350 \\ 2200 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 & 0{,}25 \\ 0{,}05 & 0{,}80 & 0{,}25 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1450 \\ 6350 \\ 2200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2490 \\ 5702{,}5 \\ 1807{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 & 0{,}25 \\ 0{,}05 & 0{,}80 & 0{,}25 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2490 \\ 5702{,}5 \\ 1807{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3263{,}1 \\ 5138{,}4 \\ 1598{,}5 \end{pmatrix}$$

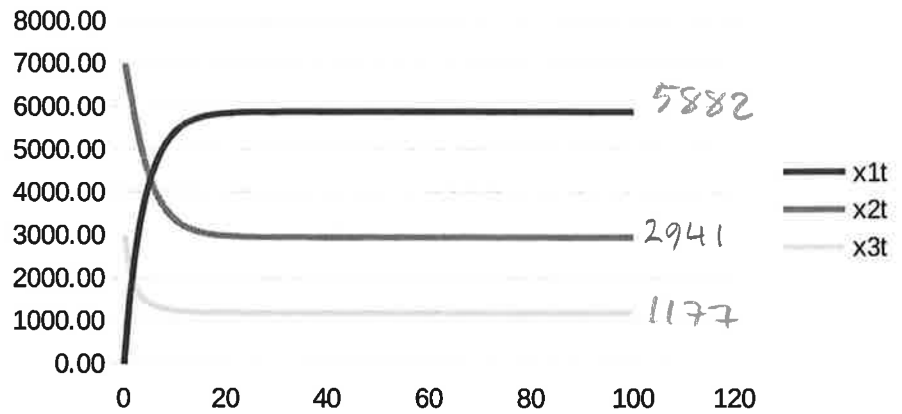
$$\bar{x}_4 = \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 & 0{,}25 \\ 0{,}05 & 0{,}80 & 0{,}25 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3263{,}1 \\ 5138{,}4 \\ 1598{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3850{,}3 \\ 4673{,}5 \\ 1476{,}2 \end{pmatrix}$$

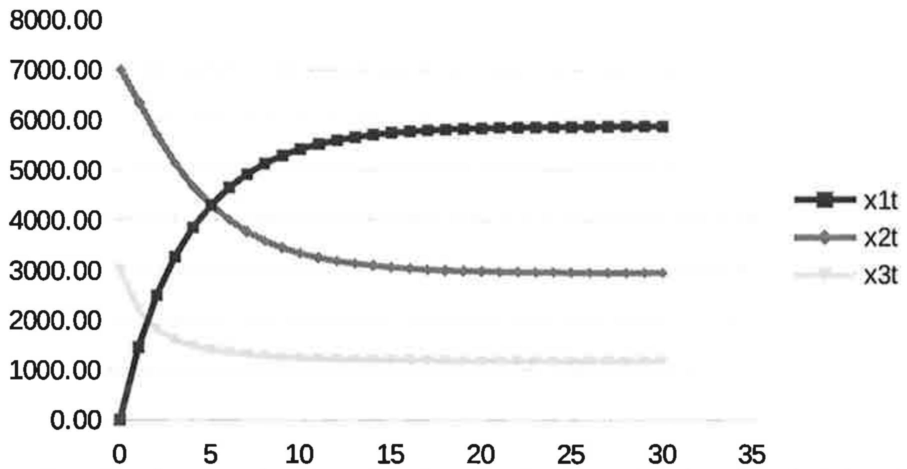
$$\bar{x}_5 = \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 & 0{,}25 \\ 0{,}05 & 0{,}80 & 0{,}25 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3850{,}3 \\ 4673{,}5 \\ 1476{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4301{,}7 \\ 4300{,}4 \\ 1397{,}9 \end{pmatrix}$$

Excelilla

$$P = \begin{bmatrix} 0.90 & 0.10 & 0.25 \\ 0.05 & 0.80 & 0.25 \\ 0.05 & 0.10 & 0.50 \end{bmatrix}$$

t	x1t	x2t	x3t
0	0.00	7000.00	3000.00
1	1450.00	6350.00	2200.00
2	2490.00	5702.50	1807.50
3	3263.13	5138.38	1598.50
4	3850.28	4673.48	1476.24
5	4301.66	4300.36	1397.98
6	4651.02	4004.87	1344.11
7	4922.43	3772.47	1305.09
8	5133.71	3590.37	1275.92
9	5298.36	3447.96	1253.68





6. Mikä on tehtävässä 5 kuvattujen markkinoiden tasapainojakauma $\vec{x}^*$

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}, \text{ kun } k \to \infty$$

Ohje: Tasapainojakauma toteuttaa yhtälöt

$$\begin{cases} P\vec{x}^* &= \vec{x}^* \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* &= 10000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}90x_1^* + 0{,}10x_2^* + 0{,}25x_3^* = x_1^* \\ 0{,}05x_1^* + 0{,}80x_2^* + 0{,}25x_3^* = x_2^* \\ 0{,}05x_1^* + 0{,}10x_2^* + 0{,}50x_3^* = x_3^* \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* = 10000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}10x_1^* + 0{,}10x_2^* + 0{,}25x_3^* = 0 \\ 0{,}05x_1^* - 0{,}20x_2^* + 0{,}25x_3^* = 0 \\ 0{,}05x_1^* + 0{,}10x_2^* - 0{,}50x_3^* = 0 \\ x_1 + x_2^* + x_3^* = 10000 \end{cases} \quad \cdot 1 \quad \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}10x_1^* + 0{,}10x_2^* + 0{,}25x_3^* = 0 \\ 0{,}05x_1^* - 0{,}20x_2^* + 0{,}25x_3^* = 0 \\ 0 = 0 \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* = 10000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}25 \\ 0{,}05 & -0{,}20 & 0{,}25 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10000 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}25 \\ 0{,}05 & -0{,}20 & 0{,}25 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10\,000 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Excel}}{=} \begin{pmatrix} 5882{,}35 \\ 2941{,}18 \\ 1176{,}47 \end{pmatrix}$$

7. Olkoon A-pesuaineen valmistajan saama kate 0,40€/paketti. Oletamme nyt, että yksi kierros ~ yksi kuukausi.

a) Mikä on ensimmäisen vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto (ei diskontata)

$$\sum_{k=1}^{12} 0{,}40 \cdot x_{1k}.$$

b) Mainosyhtiö tarjoaa kampanjaa, jonka avulla pesuaineen A markkinaosuus saataisiin viikon tehokampanjalla suoraan tasapainotilaan ilman transienttiä kasvujaksoa. Mikä on vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto mainoskampanjan jälkeen (ei diskontata)

$$12 \cdot 0{,}40 \cdot x_1^*.$$

Mitä kampanjasta enintään kannattaa maksaa?

Excel

k	x_{1k}
1	1450,00
2	2490,00
3	3263,13
4	3850,28
5	4301,66
6	4651,02
7	4922,43
8	5133,71
9	5298,36
10	5426,74
11	5526,87
12	5604,99
	51 919,185

a) $\sum_{k=1}^{12} 0{,}40 \cdot x_{1k} = 0{,}40 \cdot 51\,919{,}185 = 20\,767{,}67$ €

b) $\sum_{k=1}^{12} 0{,}40 \cdot x_1^* = 12 \cdot 0{,}40 \cdot 5882{,}35 = 28\,235{,}28$ €

Mainoskampanjan maksimihinta

28 235,28€ − 20767,67€ = 7 467,61 €

8. Miten edellisen tehtävän tulokset muuttuvat, jos laskemme kertyneiden katetuottojen sijasta vuoden ajalta katetuottovirran nykyarvot ja kuukausijaksoon liittyvä laskentakorkokanta on $i = 0{,}01$.

Excelin NPV-funktiolla

26482,52€ − 19294,21€ = 7188,31€

8. Miten edellisen tehtävän tulokset muuttuvat, jos laskemme kertyneiden katetuottojen sijasta vuoden ajalta katetuottovirran nykyarvot ja kuukausijaksoon liittyvä laskentakorkokanta on $i = 0{,}01$.

Excel

Ilman mainoskampanjan

$NPV_{1-12} = 19\,294{,}21\,€$

Mainoskampanjan avulla

$NPV_{1-12} = 26\,482{,}52\,€$

Ero 7 188,31 €