Vaasan yliopisto, kevät 2015

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

8. harjoitus, viikko 11 (9.–13.2.2015)

R1	ma	8–10	D115	R5	ti	14–16	C209
R2	ma	14–16	B209	R6	to	10–12	C209
R3	ti	08–10	C209	R7	pe	08–10	D115
R4	ti	12–14	C209	R8	pe	10–12	D115

1. Muuttuja x saa arvoja väliltä $0 \leq x \leq 2$ niin, että todennäköisyystiheys on $\phi(x) = 0{,}75 \cdot (2x - x^2)$. Funktion kerroin valitaan niin, että $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx = 1$.
a) Tarkista, että kerroin on oikein asetettu. Ts. laske integraali

$$\int_0^2 \phi(x)\,dx$$

b) Laske muuttujan x odotusarvo

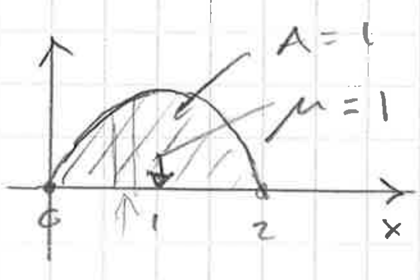
$$\mathrm{E}[x] = \int_0^2 x \cdot \phi(x)\,dx.$$

c) Millä todennäköisyydellä $x \geq 1.2$. Ts. Laske

$$P[x \geq 1.2] = \int_{1.2}^2 \phi(x)\,dx$$

a)
$$\int_0^2 0{,}75\,(2x - x^2)\,dx = 0{,}75 \Big/_0^2 \left(x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right)$$
$$= 0{,}75\left(\left(2^2 - \tfrac{1}{3}2^3\right) - \left(0^2 - \tfrac{1}{3}\cdot 0^3\right)\right)$$
$$= 0{,}75\left(4 - \tfrac{1}{3}\cdot 8\right)$$
$$= 0{,}75\cdot\left(\tfrac{12}{3} - \tfrac{8}{3}\right) = 0{,}75\cdot\tfrac{4}{3} = \underline{\underline{1}}$$

b)
$$\mathrm{E}[x] = \int_0^2 x \cdot 0{,}75\,(2x - x^2)\,dx$$
$$= 0{,}75 \cdot \int_0^2 (2x^2 - x^3)\,dx$$
$$= 0{,}75 \cdot \Big/_0^2\ \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4$$
$$= 0{,}75 \cdot \left(\left(\tfrac{2}{3}\cdot 2^3 - \tfrac{1}{4}\cdot 2^4\right) - \left(\tfrac{2}{3}\cdot 0^3 - \tfrac{1}{4}\cdot 0^4\right)\right)$$
$$= 0{,}75 \cdot \left(\left(\tfrac{16}{3} - 4\right) - 0\right)$$
$$= 0{,}75 \cdot \tfrac{4}{3} = \underline{\underline{1}}$$



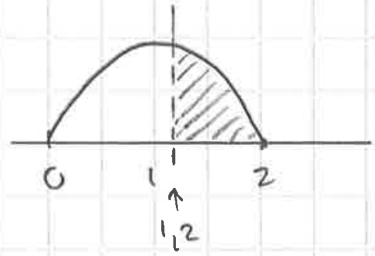
c) $P[x \geq 1{,}2] = \int_{1{,}2}^{2} \varphi(x)\,dx = \int_{1{,}2}^{2} 0{,}75 \cdot (2x - x^2)\,dx$

$= 0{,}75 \Big/_{1{,}2}^{2} \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$

$= 0{,}75\left(\left(2^2 - \frac{1}{3}2^3\right) - \left(1{,}2^2 - \frac{1}{3}\cdot 1{,}2^3\right)\right)$

$= 0{,}75\left(4 - \frac{8}{3} - 1{,}44 + \frac{1}{3}\cdot 1{,}728\right)$

$= \underline{\underline{0{,}352}}$



Vastaus a) 1 b) 1 c) 0,352

2. Erään tuotekorin osalta tiedetään vuosien 2000 ja 2010 hinnat ja ostojen määrät. Perusajankohta on nyt 2000 ja vertailuajankohta 2010

	2000		2010	
tuote	p_0	q_0	p_t	q_t
1	10,00	200	15,00	100
2	2,00	500	8,00	100
3	30,00	20	10,00	300

a) Laske Laspeyres'in ja Paashenin hintaindeksit.
b) Mikä selittää indeksien suuren eron?

a) $P^L = \frac{\sum p_{ti}\, q_{t_0 i}}{\sum p_{t_0 i}\, q_{t_0 i}} \cdot 100 = \frac{15\cdot 200 + \boxed{8\cdot 500} + 10\cdot 20}{10\cdot 200 + \boxed{2\cdot 500} + 30\cdot 20} \cdot 100 = 200$

$P^P = \frac{\sum p_{ti}\, q_{ti}}{\sum p_{t_0 i}\, q_{ti}} \cdot 100 = \frac{15\cdot 100 + 8\cdot 100 + \boxed{10\cdot 300}}{10\cdot 100 + 2\cdot 100 + \boxed{30\cdot 300}} \cdot 100 = 52$

b) P^L:ssä isoin paino tuotteelle 2 jonka hinta nousi voimakkaasti
P^P:ssä isoin paino tuotteelle 3, jonka hinta laski voimakkaasti

3. Laske tehtävän 2 tuotekorille Fisherin volyymi-indeksi.

$$P^F = \sqrt{P^L \cdot P^P} = \sqrt{283{,}3 \cdot 73{,}6} = \underline{\underline{144{,}4}}$$

4. Ratkaise yhtälöryhmät

$$\text{a)} \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 5y = 14 \\ x + 2y = 5 \end{cases}, \qquad \text{b)} \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 5y = 14 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

a)
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 14 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot 2 \ \cdot 4 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \\ \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{-6} \end{array}\right)$$

$$\to \begin{cases} x + 2y = 5 & (1) \\ -3y = -6 & (2) \end{cases}$$

$(2) \to y = 2$

$(1) \to x + 2 \cdot 2 = 5 \to x = 1$

$$V: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

b)
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 14 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot 2 \ \cdot 4 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \cdot 1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \leftarrow \text{epätosi} \to \underline{R_1 = \emptyset}$$

$$Q^L = \frac{\sum q_{ti} p_{t_0 i}}{\sum q_{t_0 i} p_{t_0 i}} \cdot 100 = \frac{100 \cdot 10 + 100 \cdot 2 + 300 \cdot 30}{200 \cdot 10 + 500 \cdot 2 + 20 \cdot 30} \cdot 100 = 283{,}3$$

$$Q^P = \frac{\sum q_{ti} p_{ti}}{\sum q_{t_0 i} p_{ti}} \cdot 100 = \frac{100 \cdot 15 + 100 \cdot 8 + 300 \cdot 10}{200 \cdot 15 + 500 \cdot 8 + 20 \cdot 10} \cdot 100 = 73{,}6$$

4/6

5. Yritys valmistaa muoviraaka-aineesta kahta tuotetta A ja B. Tuotteen A valmistaminen vie aikaa 15min ja raaka-ainetta 10kg. Tuotteen B valmistaminen vie aikaa 12min ja raaka-ainetta 15kg. Raaka-ainetta on olemassa 2500 kg/viikko ja laitteisto, jolla tuotteita valmistetaan on käytössä 40 tuntia viikossa. Yhden A-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 5 euroa ja yhden B-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 7 euroa. Mahdollisesti käyttämättä jäänyt muoviraaka-aine voidaan myydä hintaan 300 euroa/tonni. Määrittele päätösmuuttujat ja muodosta lp-malli myyntivoiton maksimoimiseksi. (Älä ratkaise mallia.)

Päätösmuuttujat

x_1 = tuotteen A valmistusmäärä kpl/vko
x_2 = — " — B — " — — " —
x_3 = muoviraaka-aineen myynti kg/vko

Tavoitefunktio

$$z = 5x_1 + 7x_2 + 0{,}3x_3$$

Rajoitteet

Raaka-aine: $10x_1 + 15x_2 + x_3 \le 2500$ (kg/vko)
Aika: $15x_1 + 12x_2 \le 40 \cdot 60$ (min/vko)
Merkki: $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

$\therefore$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 5x_1 + 7x_2 + 0{,}3x_3 \\ \text{ehdoin} & 10x_1 + 15x_2 + x_3 \le 2500 \\ & 15x_1 + 12x_2 \le 2400 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}}$$

```
# 2015: harjoitus h8 tehtävä t5

c = [5 7 0.3];
A = [10 15 1; 15 12 0];
b = [2500; 2400];
[x,z,status] = glpk(c,A,b,[0 0 0],[],"UU","CCC",-1)

#---------------------------------------------------
# output:
# x =
#      57.14286
#     128.57143
#       0.00000
#
# z =   1185.7
# status = 0 180
```

II

Päätösmuuttujat

x_1 = tuotteen A valmistus kpl/vko
x_2 = — " — B — " — — " —

Käyttämättä jäänyt raaka-aine, joka myydään

$$m = 2500 - 10x_1 - 15x_2$$

Tavoitefunktio

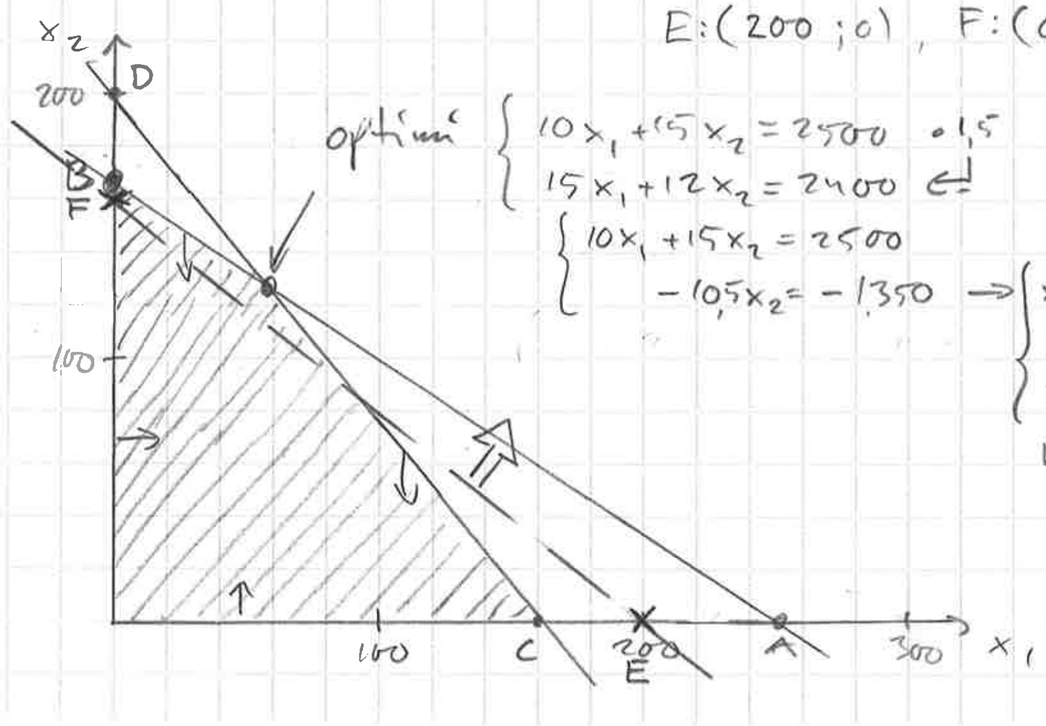
$$\begin{aligned} z &= 5x_1 + 7x_2 + 0{,}3 \cdot m \\ &= 5x_1 + 7x_2 + 0{,}3 \cdot (2500 - 10x_1 - 15x_2) \\ &= 5x_1 + 7x_2 + 750 - 3x_1 - 4{,}5x_2 \\ &= 2x_1 + 2{,}5x_2 + 750 \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Max } z = 2x_1 + 2{,}5x_2 + 750 \\ &\text{ehdoin} \quad 10x_1 + 15x_2 \le 2500 \\ &\qquad\quad\;\; 15x_1 + 12x_2 \le 2400 \\ &\qquad\qquad\quad\;\; x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}}$$

rajoite 1: $10x_1 + 15x_2 \le 2500$ A:(250;0), B:(0; 167) ↓
rajoite 2: $15x_1 + 12x_2 \le 2400$ C:(160;0), D:(0; 200) ↓

tavoitesuora: $2x_1 + 2{,}5x_2 + 750 = 1150$
E:(200 ;0), F:(0; 160)

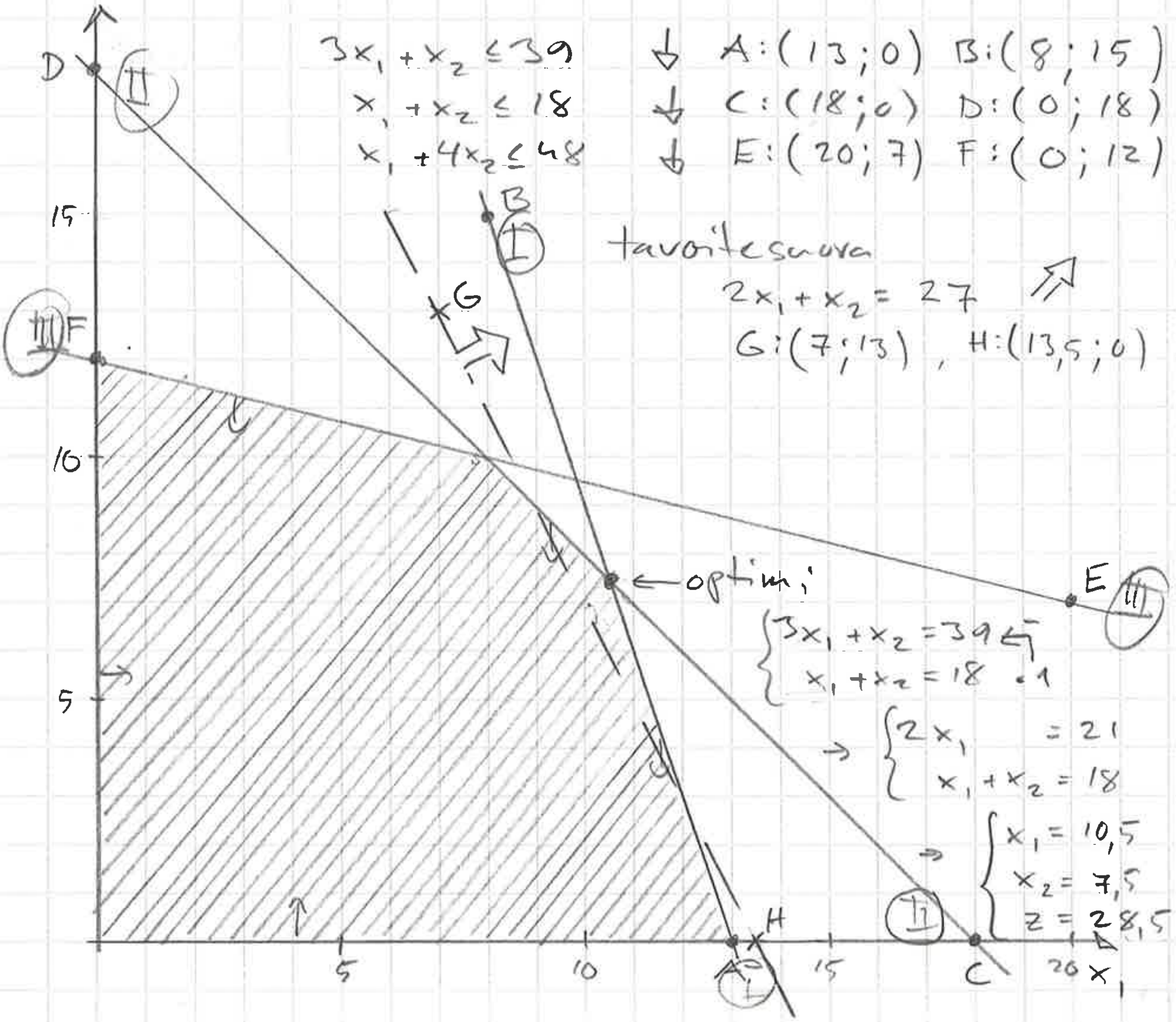


optimi $\begin{cases} 10x_1 + 15x_2 = 2500 & \cdot 1{,}5 \\ 15x_1 + 12x_2 = 2400 & \end{cases}$

$\begin{cases} 10x_1 + 15x_2 = 2500 \\ -10{,}5x_2 = -1350 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 128{,}6 \\ x_1 = 57{,}1 \\ z = 1185{,}7 \\ m = 0 \end{cases}$

6. Ratkaise graafisesti seuraava lp-malli

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max z = & 2x_1 & + & x_2 & & \\
\text{ehdoin} & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 39 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 48 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



Vastaus: $x_1 = 10,5$, $x_2 = 7,5$ ja $z_{opt} = 28,5$

```
# 2015: harjoitus h8 tehtävä t6

c = [2 1];
A = [3 1; 1 1; 1 4];
b = [39; 18; 48];
[x,z,status] = glpk(c,A,b,[0 0],[],"UUU","CC",-1)

#---------------------------------------------------
# output:
# x =
#      10.5000
#       7.5000
#
# z =  28.500
# status = 180
```