

**Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030**

**9. harjoitus, viikko 12 (16.-20.2.2015)**

R1	ma	8-10	D115	R5	ti	14-16	C209
R2	ma	14-16	B209	R6	to	10-12	C209
R3	ti	08-10	C209	R7	pe	08-10	D115
R4	ti	12-14	C209	R8	pe	10-12	D115

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)  
 a)  $A+B$ , b)  $A+C$ , c)  $B+C$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A+C$  ei voi laskea (matriisit eri kokoisia!)  
 $B+C$  ei voi laskea

2. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)  
 a)  $AB$ , b)  $BA$ , c)  $AC$ , d)  $CA$ , e)  $C^T A$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 6 & 9 & -2 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$3 \times 3 \quad 3 \times 2$

$CA$  ei voi laskea /  $C^T A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -13 & 3 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

$2 \times 3 \quad 3 \times 3$

3. Määritä rivooperaatioiden avulla käänneismatriisi matriisille

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 1 \cdot 2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot 1 \cdot 3 \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \cdot \frac{3}{2} \\ \cdot (-2) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -3,5 & 1,5 \\ -0,5 & 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x + z = 7 \\ 2x + y + 3z = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -3,5 & 1,5 \\ -0,5 & 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

II loppu

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 15 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1 \quad \cdot 2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 7 & 15 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x - y - 2z = 0 & (1) \\ y + 3z = 7 & (2) \\ -2z = -6 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \rightarrow z = 3$$

$$(2) \rightarrow y + 3 \cdot 3 = 7 \rightarrow y = -2$$

$$(1) \rightarrow x - (-2) - 2 \cdot 3 = 0 \rightarrow x = 4$$

$$V = \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

5. Miten edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu, jos kolmannen yhtälön oikea puoli kasvaa yhdellä (arvosta 15 arvoon 16)?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -3,5 & 1,5 \\ -0,5 & 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -3,5 & 1,5 \\ -0,5 & 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ -0,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

↑ muutos

6. Alla on taulukossa esitettyä erään yrityksen tuotannon jakautuminen ja panosten käyttö tilikaudella. Laske tuotteiden omakustannusarvot. Teorian löydät kurssin verkkosivulta slaidilta L22 (tai opetusmonisteen sivuilta 238–247).

		Os1	Os2	Os3	myynti (kpl)	yhteensä (kpl)	hinta (€/kpl)
	Os1	50	100	0	850	1000	$p_1$
	Os2	10	40	50	400	500	$p_2$
	Os3	20	0	30	200	250	$p_3$
raaka-aine 1	tt1	300	0	700		1000	1.00
raaka-aine 2	tt2	400	400	0		800	10.00
työvoima 1	tt3	70	100	150		320	20.00
työvoima 2	tt4	10	15	10		35	50.00

Tarvittava kaava on:  $p^T = c^T B(I - A)^{-1}$ , missä

$$A = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,20 & 0,00 \\ 0,01 & 0,08 & 0,20 \\ 0,02 & 0,00 & 0,12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,30 & 0,00 & 2,80 \\ 0,40 & 0,80 & 0,00 \\ 0,07 & 0,20 & 0,60 \\ 0,01 & 0,03 & 0,04 \end{pmatrix}$$

$$I - A = \begin{pmatrix} 0,95 & -0,20 & 0,00 \\ -0,01 & 0,92 & -0,20 \\ -0,02 & 0,00 & 0,88 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1,00 \\ 10,00 \\ 20,00 \\ 50,00 \end{pmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,056146942 & 0,229597161 & 0,052181173 \\ 0,016697975 & 1,090586516 & 0,247860572 \\ 0,024003340 & 0,005218117 & 1,137549572 \end{pmatrix}$$

$$p^T = c^T B (I - A)^{-1}$$

$$\stackrel{\text{Excel}}{=} (1 \ 10 \ 20 \ 50) \begin{pmatrix} 0,38405 & 0,08349 & 3,20079 \\ 0,43582 & 0,96431 & 0,21916 \\ 0,09167 & 0,23732 & 0,73575 \\ 0,01203 & 0,03522 & 0,05346 \end{pmatrix}$$

$$= (7,18 \quad 16,23 \quad 22,78)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2			1	0	0			
3		I =	0	1	0			
4			0	0	1			
5								
6			0.05	0.2	0			
7		A =	0.01	0.08	0.2			
8			0.02	0	0.12			
9								
10			0.3	0	2.8		c =	1
11		B =	0.4	0.8	0			10
12			0.07	0.2	0.6			20
13			0.01	0.03	0.04			50
14								
15			0.95	-0.2	0			
16		I-A =	-0.01	0.92	-0.2		'C15:E17	'=C2:E4-C6:E8
17			-0.02	0	0.88			
18								
19			1.0561469422	0.2295971613	0.052181173			
20		(I-A) <sup>-1</sup> =	0.0166979754	1.0905865164	0.2478605719		'C19:E21	'=MINVERSE(C15:E17)
21			0.0240033396	0.0052181173	1.1375495721			
22								
23			0.38405	0.08349	3.20079			
24		B(I-A) <sup>-1</sup> =	0.43582	0.96431	0.21916		'C23:E26	'=MMULT(C10:E13,C19:E21)
25			0.09167	0.23732	0.73575			
26			0.01202	0.03522	0.05346			
27								
28			7.18					
29		p =	16.23				'C28:C30	'=TRANSPOSE(MMULT(TRANSPOSE(H10:H13),C23:E26))
30			22.78					
31								
32								