

Linkkejä

Integraalifunktio

Kaavoja

Integroimiskeinoja

Määrätty integraali

Määrätty integraali summana

Kassavirta, kassakertymä ja NNA

Vakiotulovirran nykyarvo

Aiheet

Linkkejä

Integraalifunktio

Kaavoja

Integroimiskeinoja

Määrätty integraali

Määrätty integraali
summana

Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA

Vakiotulovirran
nykyarvo

Vakiotulovirran nykyarvo

- ▶ Matta-projekti(Aalto yliopisto): **Integraali**
(<http://matta.hut.fi/matta2/isom/html/isomli8.html>)
- ▶ Johdatus korkeakoulumatematiikkaan (Tampereen teknillinen korkeakoulu): **Integraali**
(<http://matwww.ee.tut.fi/jkkm/integraa/integ01.htm>)
- ▶ Wikipedia: **Riemannin-integraali**
(http://fi.wikipedia.org/wiki/Riemannin_integraali)
- ▶ MathWorld.Wolfram.com: **Integrals**
(<http://mathworld.wolfram.com/topics/Integrals.html>)

Jos jatkuvan funktion $F(x)$ derivaatta on

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x),$$

niin sanomme, että $F(x)$ on funktion $f(x)$ **integraalifunktio**, ja merkitsemme

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Lue: "(Iso)F-x on **integraali-f-x-dx**".

(HUOM. Merkintätapa, jossa funktio nimetään pienellä kirjaimella ja sen integraalifunktio vastaavasti samalla ISOLLA kirjaimella, ei ole standardi, mutta paljon käytetty. Käytämme tässä kalvosarjassa tätä merkintätapaa.)

Aiheet

Linkkejä

Integraalifunktio

Kaavoja

Integroimiskeinoja

Määrätty integraali

Määrätty integraali
summana

Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA

Vakiotulovirran
nykyarvo

Integraalifunktio on "vakiota vaille" yksikäsitteinen.

Esim. Jos $f(x) = 2x$, niin funktio $F_1(x) = x^2$ on f :n integraalifunktio, mutta myös funktio $F_2(x) = x^2 + 100$ on f :n integraalifunktio, sillä

$$\frac{d}{dx}F_1(x) = \frac{d}{dx}x^2 = 2x = f(x), \text{ ja}$$

$$\frac{d}{dx}F_2(x) = \frac{d}{dx}(x^2 + 100) = 2x = f(x)$$

Vakio voidaan valita vapaasti. Jokainen valinta kelpaa. Siksi merkitsemme

$$\int 2x \, dx = x^2 + C$$

Aiheet

Linkkejä

Integraalifunktio

Kaavoja

Integroimiskeinoja

Määrätty integraali

Määrätty integraali
summana

Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA

Vakiotulovirran
nykyarvo

Integraalifunktio ei siis ole yksikäsitteinen.

Lause: Jos $F_0(x)$ on funktion $f(x)$ integraalifunktio, niin mikä tahansa toinen f :n integraalifunktio $F(x)$ saadaan F_0 :sta lisäämällä jokin vakio

$$F(x) = F_0(x) + A, \quad \forall x.$$

Sivuutamme nyt asian perustelun. Se on mielenkiintoinen itsessään ja palaamme ehkä asiaan.

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Integraalifunktio](#)[Kaavoja](#)[Integroimiskeinoja](#)[Määrätty integraali](#)[Määrätty integraali
summana](#)[Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA](#)[Vakiotulovirran
nykyarvo](#)

Derivointikaavojen avulla saadaan yksinkertaisia kaavoja integraalifunktion löytämiseksi

Derivointikaava

$$\frac{d}{dx} ax^n = nax^{n-1}$$

$\longleftrightarrow$

Integrintikaava

$$\int bx^m dx = \frac{b}{m+1} x^{m+1} + C$$

Derivointikaava

$$\frac{d}{dx} (ae^{bx}) = abe^{ax}$$

$\longleftrightarrow$

Integrintikaava

$$\int ae^{bx} dx = \frac{a}{b} e^{bx} + C$$

Derivointikaava

$$\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$$

$\longleftrightarrow$

Integrintikaava

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

Aiheet

Linkkejä

Integraalifunktio

Kaavoja

Integroimiskeinoja

Määrätty integraali

Määrätty integraali
summana

Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA

Vakiotulovirran
nykyarvo

Integroimisen lineaarisuus:

Jos $F_1(x)$ on funktion $f_1(x)$ integraalifunktio ja jos $F_2(x)$ on funktion $f_2(x)$ integraalifunktio, niin

$$\int (a \cdot f_1(x) + b \cdot f_2(x)) dx = a \cdot F_1(x) + b \cdot F_2(x) + C.$$

Perustelu: Derivoidaan oikea puoli.

Seuraus: Polynomi voidaan integroida termi kerrallaan.

$$\int (4x^2 + 6x + 5) dx = \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 + 5x + C = \frac{4}{3}x^3 + 3x^2 + 5x + C.$$

Aiheet

Linkkejä

Integraalifunktio

Kaavoja

Integroimiskeinoja

Määrätty integraali

Määrätty integraali
summana

Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA

Vakiotulovirran
nykyarvo

$$(1) \quad \int a dx = ax + C,$$

$$(1a) \quad \int dx = \int 1 dx = x + C,$$

$$(1b) \quad \int 0 dx = 0x + C = C,$$

$$(2) \quad \int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C, \quad \text{kun } k \neq -1$$

$$(3) \quad \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$(4) \quad \int e^x dx = e^x + C,$$

$$(5) \quad \int (\ln x) dx = \quad \quad \quad (\text{selviää myöhemmin})$$

Aiheet

Linkkejä

Integraalifunktio

Kaavoja

Integroimiskeinoja

Määrätty integraali

Määrätty integraali
summana

Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA

Vakiotulovirran
nykyarvo

$$(6) \quad \int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx,$$

$$(7) \quad \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

$$(8) \quad \frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x),$$

$$(9) \quad \int f'(x) dx = f(x) + C,$$

Aiheet

Linkkejä

Integraalifunktio

Kaavoja

Integroimiskeinoja

Määrätty integraali

Määrätty integraali
summana

Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA

Vakiotulovirran
nykyarvo

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Integraalifunktio](#)[Kaavoja](#)[Integroimiskeinoja](#)[Määrätty integraali](#)[Määrätty integraali
summana](#)[Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA](#)[Vakiotulovirran
nykyarvo](#)

$$(10) \quad \int g(f(x)) \cdot f'(x) dx = G(f(x)) + C,$$

$$(10a) \quad \int ([f(x)]^k \cdot f'(x)) dx = \frac{1}{k+1} [f(x)]^{k+1},$$

$$(10b) \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C,$$

$$(10c) \quad \int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + C.$$

a) Polynomi integroidaan termi kerrallaan

$$\int (7x^3 - 5x + 8) dx = \frac{7}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 8x + C$$

b) Seuraavassa poistetaan ensin sulut

$$\begin{aligned} \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx &= \int \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int (1 + 2x^{-1} + x^{-2}) dx \\ &= x + 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + C = x + \ln(x^2) - \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int x\sqrt{x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \int 2x \cdot (x^2+1)^{1/2} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2}+1)} (x^2+1)^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{3} (x^2+1)^{3/2} + C \end{aligned}$$

Aiheet

Linkkejä

Integraalifunktio

Kaavoja

Integroimiskeinoja

Määrätty integraali

Määrätty integraali
summana

Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA

Vakiotulovirran
nykyarvo

Esimerkki 1. Jos yrityksen rajakustannus on $MC(q) = 5 + 0,01q$, niin kustannusfunktio rajakustannuksen integraali

$$C(q) = \int MC(q) dq = \int (5 + 0,01q) dq = 5q + 0,005q^2 + A$$

Integroimisvakiota kannattaa nyt merkitä jollakin muulla kirjaimella kuin C :llä. Käytännössä A on kiinteät kustannukset eli $A = FC$.

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Integraalifunktio](#)[Kaavoja](#)[Integroimiskeinoja](#)[Määrätty integraali](#)[Määrätty integraali
summana](#)[Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA](#)[Vakiotulovirran
nykyarvo](#)

Esimerkki 2. Määritä kustannusfunktio, kun rajakustannus on $MC(q) = 6 + 0,02q$ ja $C(100) = 1200$.

(askel 1, integrointi)

$$C(q) = \int (6 + 0,02q) dq = 6q + 0,01q^2 + A$$

(askel 2, vakion määrittäminen)

$$\begin{aligned} C(100) &= 1200 \\ \Leftrightarrow 6 \cdot 100 + 0,01 \cdot 100^2 + A &= 1200 \\ \Leftrightarrow 600 + 100 + A &= 1200 \\ \Leftrightarrow A &= 500 \end{aligned}$$

(askel 3, tulkinta)

$$C(q) = 6q + 0,01q^2 + 500.$$

Aiheet

Linkkejä

Integraalifunktio

Kaavoja

Integroimiskeinoja

Määrätty integraali

Määrätty integraali
summana

Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA

Vakiotulovirran
nykyarvo

Lause: Jos f ja g ovat derivoituvia (ja siis jatkuvia), niin

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Perustelu: Väite on yhtäpitävä sen kanssa, että

$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = f(x)g(x) + C.$$

Tämä puolestaan on selvä tulon derivointikaavan perusteella.

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Integraalifunktio](#)[Kaavoja](#)[Integroimiskeinoja](#)[Määrätty integraali](#)[Määrätty integraali
summana](#)[Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA](#)[Vakiotulovirran
nykyarvo](#)

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Esimerkki 1. Laske integraali $\int xe^x dx$.

Valitaan

$$\begin{cases} f(x) &= x \\ g'(x) &= e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) &= 1 \\ g(x) &= e^x \end{cases}, \text{ jolloin}$$

$$\int (\ln x) dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Integraalifunktio](#)[Kaavoja](#)[Integroimiskeinoja](#)[Määrätty integraali](#)[Määrätty integraali
summana](#)[Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA](#)[Vakiotulovirran
nykyarvo](#)

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Esimerkki 1. Laske integraali $\int (\ln x)dx$.

Valitaan

$$\begin{cases} f(x) &= \ln x \\ g'(x) &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) &= 1/x \\ g(x) &= x \end{cases}, \text{ jolloin}$$

$$\int (\ln x)dx = x \cdot \ln x - \int \left(\frac{1}{x} \cdot x\right)dx = x \cdot \ln x - x + C$$

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Integraalifunktio](#)[Kaavoja](#)[Integroimiskeinoja](#)[Määrätty integraali](#)[Määrätty integraali
summana](#)[Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA](#)[Vakiotulovirran
nykyarvo](#)

Lause: Jos $t = f(x)$, niin

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx = \int g(t) dt.$$

Perustelu: Väite on yhtäpitävä sen kanssa, että

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx = \int g(t) dt = G(t) + C = G(f(x)) + C.$$

Tämä puolestaan on yksi kaavakokoelman kaavoista, joka perustellaan yhdistetyn funktion derivointikaavalla.

Muistisääntö:

$$\begin{array}{ll} g(f(x)) = g(t) & \text{sillä } t = f(x), \\ f'(x) dx = dt & \text{sillä } \frac{dt}{dx} = f'(x). \end{array}$$

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Integraalifunktio](#)[Kaavoja](#)[Integroimiskeinoja](#)[Määrätty integraali](#)[Määrätty integraali
summana](#)[Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA](#)[Vakiotulovirran
nykyarvo](#)

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx = \int g(t) dt.$$

Esimerkki 1. Laske $\int x(3x^2 - 1)^5 dx$.

Otetaan käyttöön uusi muuttuja $t = 3x^2 - 1 = f(x)$.

Silloin $dt = f'(x)dx = 6x \cdot dx$. Teemme siis sijoitukset

$$\begin{cases} 3x^2 - 1 & \leftarrow t \\ x \cdot dx & \leftarrow \frac{1}{6} \cdot dt \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \int x(3x^2 - 1)^5 dx &= \int t^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot dt = \frac{1}{6} \int t^5 dt \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot t^6 + C = \frac{1}{36} (3x^2 - 1)^6 + C \end{aligned}$$

Aiheet

Linkkejä

Integraalifunktio

Kaavoja

Integroimiskeinoja

Määrätty integraali

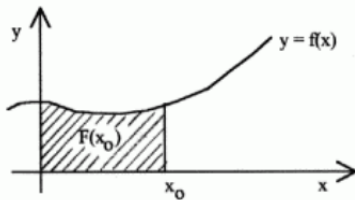
Määrätty integraali
summana

Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA

Vakiotulovirran
nykyarvo

Oletamme, seuraavassa, että $f(x) > 0$. (Oletus on mahdollista "puhua pois", mutta asia on helpompi omaksu ja kuvat on helpompi piirtää, kun aluksi yksinkertaistamme hieman.)

Merkitsemme $F(x_0)$:lla sitä pinta-alaa, jota rajoittavat käyrä $y = f(x)$, x -akseli, y -akseli ja suora $x = x_0$.



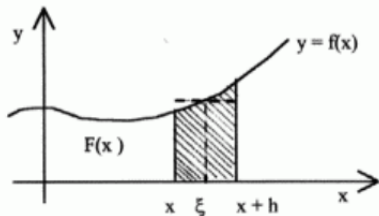
Kun $x > 0$, niin F määrittelee pinta-ala -funktion $F : x \mapsto F(x)$.

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Integraalifunktio](#)[Kaavoja](#)[Integroimiskeinoja](#)[Määrätty integraali](#)[Määrätty integraali
summana](#)[Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA](#)[Vakiotulovirran
nykyarvo](#)

Lause: Olkoon $f(x)$ jatkuva, ja olkoon $F(x)$ siihen liittyvä edellä määritelty pinta-alafunktio. Silloin

$$F'(x) = f(x),$$

eli pinta-alafunktio on eräs funktion f integraalifunktio.



Perustelu: Arvioidaan $F(x)$:n derivaattaa kohdassa x .

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \cdot h}{h} = f(x).$$

Aiheet

Linkkejä

Integraalifunktio

Kaavoja

Integroimiskeinoja

Määrätty integraali

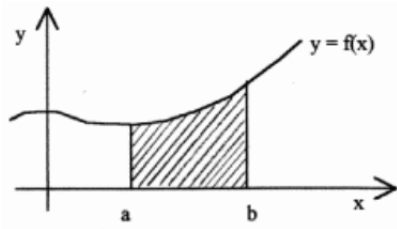
Määrätty integraali
summana

Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA

Vakiotulovirran
nykyarvo

Lause: Olkoon f jatkuva funktio ja F mikä tahansa sen integraalifunktio. Silloin käyrän $y = f(x)$, x -akselin ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajoittaman pinnan ala on

$$F(b) - F(a).$$



Perustelu: Jos $F(x)$ on edellisen lauseen pinta-alafunktio, niin asia on selvä. Jos $\Phi(x)$ on edellisen lauseen pinta-alafunktio, niin $\Phi(x) - F(x) = A$ on vakio. Silloin

$$A(b-a) = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + A) - (F(a) + A) = F(b) - F(a).$$

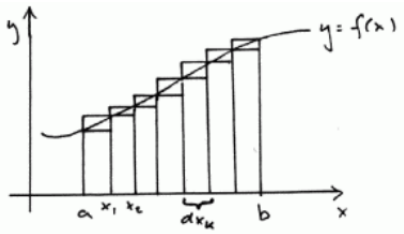
[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Integraalifunktio](#)[Kaavoja](#)[Integroimiskeinoja](#)[Määrätty integraali](#)[Määrätty integraali
summana](#)[Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA](#)[Vakiotulovirran
nykyarvo](#)

Sovitaan seuraavat merkinnät

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) dx && \text{"määrätty integraali a:sta b:hen f-x-dx"} \\ = & \int_a^b F(x) && \text{"sijoitus a:sta b:hen (is)F-x-dx"} \\ = & F(b) - F(a) \end{aligned}$$

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Integraalifunktio](#)[Kaavoja](#)[Integroimiskeinoja](#)[Määrätty integraali](#)[Määrätty integraali
summana](#)[Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA](#)[Vakiotulovirran
nykyarvo](#)

Oletetaan, että funktio $f(x)$ on määritelty ja jatkuva välillä $[a,b]$. Jaetaan väli n osaväliin jakopisteillä $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Osavälin $[x_{k-1}, x_k]$ leveys on $dx_k = x_k - x_{k-1}$. Valitaan joka väliltä luku $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ ja tarkastellaan summaa $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) dx_k$.



Jakoa tihennettäessä summa lähestyy raja-arvoa

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) dx_k \longrightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Aiheet

Linkkejä

Integraalifunktio

Kaavoja

Integroimiskeinoja

Määrätty integraali

Määrätty integraali
summana

Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA

Vakiotulovirran
nykyarvo

Olkoon $K(t)$ kassavaranto hetkellä t ja $k(t)$ kassavirta (rahavirta kassaan päin) hetkellä t . Lyhyenä aikavälinä $\tau < t < \tau + dt$ kassaan kertyvä määrä on

$$dK = k(\tau)dt.$$

Jakamalla aikaväli $t_0 < t < t_1$ osaväleihin ja laskemalla pienet kertymät yhteen saadaan aikavälin kokonaiskertymä

$$K(t_1) - K(t_0) = \sum_{j=1}^n k(\tau_j) d\tau \rightarrow \int_{t_0}^{t_1} k(t) dt$$

Aikavälillä $t_0 < t < t_1$ tulevan kassavirran nettonykyarvo saadaan vastaavasti, mutta jokainen erä tulee diskontata nykytteen

$$dNNA = e^{-\rho\tau} k(\tau) dt$$

$$NNA = \sum_{j=1}^n e^{-\rho\tau_j} k(\tau_j) d\tau \rightarrow \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho t} k(t) dt$$

Aiheet

Linkkejä

Integraalifunktio

Kaavoja

Integroimiskeinoja

Määrätty integraali

Määrätty integraali
summanaKassavirta,
kassakertymä ja
NNAVakiotulovirran
nykyarvo

Esimerkki 1. Vakio-kassavirta $k(t) = k$ alkaa hetkellä $t = a$ ja päättyy hetkellä $t = b$. Lasketaan kassavirran nykyarvo (hetkeen $t = 0$)

$$NNA = \int_a^b e^{-\rho t} k dt = \int_a^b \left(\frac{k}{-\rho} e^{-\rho t} \right) = \frac{k}{\rho} (e^{-\rho a} - e^{-\rho b})$$

Esimerkki 2. Jos kassavirta alkaa hetkellä $t = 0$, eli edellä $a = 0$, niin

$$NNA = \frac{k}{\rho} (1 - e^{-\rho b})$$

Esimerkki 3. Jos kassavirta alkaa hetkellä $t = 0$, eli edellä $a = 0$, ja kassavirta on päättymätön, eli $b \rightarrow \infty$, niin

$$NNA = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{k}{\rho} (1 - e^{-\rho b}) = \frac{k}{\rho}$$

Aiheet

Linkkejä

Integraalifunktio

Kaavoja

Integroimiskeinoja

Määrätty integraali

Määrätty integraali
summana

Kassavirta,
kassakertymä ja
NNA

Vakiotulovirran
nykyarvo