

Ongelma: Yritys omistaa oikeudet malmioon, jossa on $B = 5000$ tonnia malma. Jos malma louhitaan nopeudella

$$x \text{ (tn/kk)},$$

niin malmin myynnistä syntyy tuotto (kassavirta)

$$R(x) = 10x - 0.1x^2 \text{ (€/kk)},$$

ja toiminnasta aiheutuva kustannus (kassavirta) on

$$C(x) = 2x + 0.05x^2 \text{ (€/kk)}.$$

maksimoi katetuoton nykyarvo, kun laskentakorkoon liittyvä kuukausi korkointensiteetti on $\rho_{kk} = 0.01$,
($i_{tod} = 12 \ln(1.01) - 1 = 11.94\%$)

Kate (kassavirta) on

$$\begin{aligned}k(x) &= R(x) - C(x) \\ &= (10x - 0.1x^2) - (2x + 0.05x^2) \\ &= 8x - 0.15x^2\end{aligned}$$

Kate-kassavirta saadaan maksimaaliseksi, jos valitaan x , jolle

$$\begin{aligned}k'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 8 - 0.30x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{8}{0.30} = 26.67\end{aligned}$$

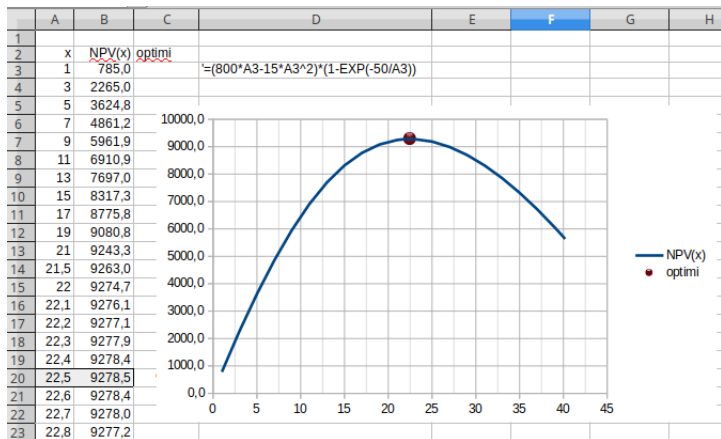
Tämä ei kuitenkaan ole optimi, koska emme maksimoi katevirtaa, vaan sen nykyarvoa.

Louhinta-aika on $T = B/x = \frac{5000}{x}$.

Maksimoitava suure, eli katevirran nykyarvo on

$$\begin{aligned} npv(x) &= \int_0^T e^{-\rho t} k(x) dt \\ &= k(x) \int_0^T e^{-\rho t} dt \\ &= \frac{(8x - 0.15x^2)}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) \\ &= \frac{(8x - 0.15x^2)}{0.01} (1 - e^{-0.01 \cdot 5000/x}) \\ &= (800x - 15x^2) (1 - e^{-50/x}) \end{aligned}$$

Ääriarvon etsintä perinteiseen tapaan derivaatan nollakohdan avulla, johtaa hankaliin laskuihin. Piirrämme NPV(x) -funktion kuvaajan



Optimi on kohdassa $x \approx 22,5$.

Diskonttauksen ottaminen huomioon (Nykyarvo) vaikutti tulokseen huomattavasti. Se pienensi louhintanopeutta, eli pidensi projektia!

Jos asiaa ajattelisi vain katekertymän kautta, niin

$$\begin{aligned} \text{kertymä} &= k(x) \cdot T \\ &= (8x - 0.15x^2) \cdot \frac{5000}{x} \\ &= (40000 - 750x) \end{aligned}$$

Tulos on tietenkin mieletön. kertymän kannalta louhintaa kannattaisi hidastaa ja projektia venyttää, jolloin katevirran nykyarvo romahtaa. lasku ilman diskonttausta antaa harhaisen tuloksen.

Asian kunnollinen ratkaisu edellyttää "Variaatiolaskentaa", jota sivutaan 'Matemaattisen Analyysin' kurssilla (orms.1010).