Etelä-Pohjanmaan Opisto, syksy 2017

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

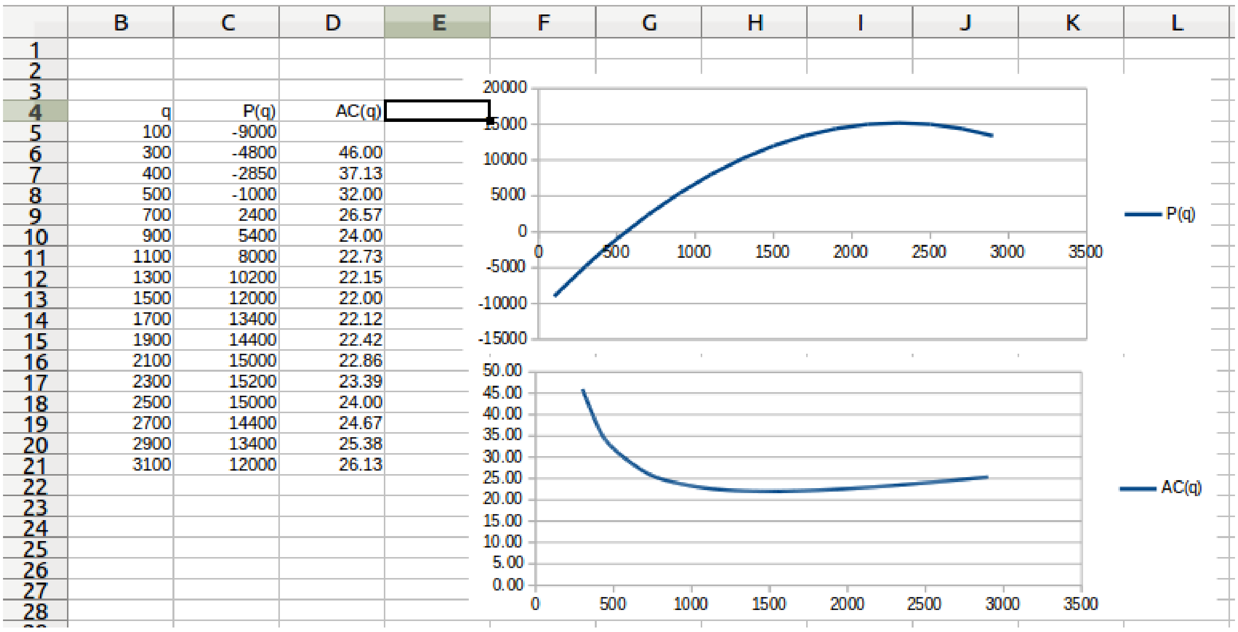
2. harjoitus, (to 2.11.2017)

1. Yritys valmistaa kappaletavaraa q kappaletta viikossa. Yhden kappaleen materiaali- ja palkkakustannus on 7 €, joten tuotannon määrästä riippuvat muuttuvat kustannukset ovat $VC = 7q$ (€ viikossa). Yrityksen kiinteät kustannukset ovat $FC = 11250$ (€ viikossa). Lisäksi ahtaiden tuotantotilojen ja varastointiongelmien takia joudutaan turvautumaan ylityöhön, josta aiheutuu kustannuserä $LC = 0.005q^2$ (€ viikossa). Kokonaiskustannus viikossa on siis $TC(q) = FC + VC + LC = 11250 + 7q + 0.005q^2$. Tuotteen myyntihinta on 30€, joten tuottofunktio on $TR = 30q$ (€ viikossa) ja voittofunktio on $P(q) = TR - TC = 23q - 0.005q^2 - 11250$ (€ viikossa). Piirrä voittofunktion $P(q)$ ja yksikkökustannusfunktion $AC(q) = TC(q)/q$ kuvaajat kun $0 < q < 3000$. Mikä on $AC(q)$:n yksikkö? Mikä on mielestäsi järkevä tuotannon määrä?
(Ohje: yksiköt $[q] = \frac{\text{kpl}}{\text{vko}}$, $[P] = \frac{\text{e}}{\text{vko}}$, $[AC] = \frac{\text{e}}{\text{kpl}}$)

Ratkaisu:

$$P(q) = 23q - 0.005q^2 - 11250$$

$$AC(q) = \frac{TC(q)}{q} = \frac{11250 + 7q + 0.005q^2}{q} = \frac{11250}{q} + 7 + 0.005q$$



q	P(q)	AC(q)
100	-9000	
300	-4800	46.00
400	-2850	37.13
500	-1000	32.00
700	2400	26.57
900	5400	24.00
1100	8000	22.73
1300	10200	22.15
1500	12000	22.00
1700	13400	22.12
1900	14400	22.42
2100	15000	22.86
2300	15200	23.39
2500	15000	24.00
2700	14400	24.67
2900	13400	25.38
3100	12000	26.13

Yksikkökustannusten yksikkö on

$$[AC] = \frac{[TC]}{[q]} = \frac{€/\text{vko}}{\text{kpl}/\text{vko}} = \frac{€}{\text{vko}} \cdot \frac{\text{vko}}{\text{kpl}} = \frac{€}{\text{kpl}}$$

Järkevä tuotannon määrä on noin 2 300kpl/vko.

2. Laske tehtävässä 1 esiintyneen voittofunktion derivaatta, eli

$$P'(q) = \frac{dP}{dq}.$$

Millä q:n arvolla $P'(q) = 0$? Tarkista tehtävän 1 kuvan avulla nollakohdan paikka. Millä q:n arvoilla $P'(q) \geq 0$? Tarkista tämäkin tehtävän 1 kuvan avulla.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} P(q) &= 23q - 0.005q^2 - 11250 \\ \Leftrightarrow P'(q) &= 23 - 0.01q \end{aligned}$$

Voittofunktion derivaatta on nolla, kun

$$\begin{aligned} P'(q) &= 0 \\ \Leftrightarrow 23 - 0.01q &= 0 \\ \Leftrightarrow -0.01q &= -23 \quad | \cdot (-100) \\ \Leftrightarrow q &= 2300 \quad \text{(kuvan perusteella OK)} \end{aligned}$$

Voittofunktion derivaatta on ≥ 0, kun

$$\begin{aligned} P'(q) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 23 - 0.01q &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -0.01q &\geq -23 \quad | \cdot (-100) \\ \Leftrightarrow q &\leq 2300 \quad \text{(kuvan perusteella OK)} \end{aligned}$$

3. Laske derivaatat

$$\begin{array}{lll} a) & f'(3), & \text{kun } f(x) = x^2 - 4x, \\ b) & g'(x), & \text{kun } g(x) = 7x^2 + 5x - 3, \\ c) & h'(x), & \text{kun } h(x) = 3x \cdot (x^2 - 5) \end{array}$$

Ratkaisu: a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x \\ \longrightarrow f'(x) &= 2x - 4 \\ \longrightarrow f'(3) &= 2 \cdot 3 - 4 = 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= 7x^2 + 5x - 3 \\ \longrightarrow g'(x) &= 14x + 5 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} h(x) &= 3x \cdot (x^2 - 5) \\ &= 3x^3 - 15x \\ \longrightarrow h'(x) &= 9x^2 + 15 \end{aligned}$$

4. Erään tuotteen kustannusfunktio on $C(q) = 0.005q^2 + 6q + 200$. a) Määritä rajakustannus $MC(q) = C'(q)$, yksikkökustannus $AC(q) = C/q)/q$ ja kiinteät kustannukset $FC = C(0)$. b) Minkä arvon edellä mainitut funktiot saavat, kun tuotannon määrä on $q = 100$?

Ratkaisu: a)

$$\begin{aligned} MC(q) &= \frac{d}{dq}\left(0.005q^2 + 6q + 200\right) = 0.01q + 6 \\ AC(q) &= \frac{0.005q^2 + 6q + 200}{q} = 0.005q + 6 + \frac{200}{q} \\ FC &= 200 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} MC(100) &= 0.01 \cdot 100 + 6 = 7 \\ AC(100) &= 0.005 \cdot 100 + 6 + \frac{200}{100} = 8.5 \\ FC &= 200 \end{aligned}$$

5. Edellisessä tehtävässä mainitun tuotteen kysyntäfunktio

$$p = f(q) = 10 - 0.01q$$

kertoo miten hinta (€/kpl) riippuu tarjolla olevien tuotteiden määrästä (kpl/kk). Tuottofunktio

$$R(q) = qp = q(10 - 0.01q) = 10q - 0.01q^2$$

Kertoo tuoton (myynnistä saatu kassatulo). Laske rajatuotto

$$MR(q) = R'(q)$$

Ratkaisu:

$$MR(q) = \frac{d}{dq}\left(10q - 0.01q^2\right) = 10 - 0.02q$$

6. Tehtävien 4 ja 5 yritys tuottaa nyt kaksisataa tuotetta kuussa ($q = 200$). Laske rajakustannus $MC(200)$ ja rajatuotto $MR(200)$. Kannattaako yrityksen kasvattaa vai pienentää tuotantoaan?

Ratkaisu:

$$MC(q) = 0.01q + 6 \quad \longrightarrow MC(200) = 0.01 \cdot 200 + 6 = 8$$

$$MR(q) = 10 - 0.02q \quad \longrightarrow MR(200) = 10 - 0.02 \cdot 200 = 6$$

Koska rajakustannus on isompi kuin rajatuotto, ei yrityksen kannata kasvattaa tuotantoa (kustannukset kasvaisivat enemmän kun tuotot). Yrityksen kannattaa pienentää tuotantoaan.

7. Yrityksen erään tuotelinjan kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.030q$ ja vastaava kustannusfunktio on $C(q) = 0.02q^2 + 5q + 150$. Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen. Mikä on maksimivoitto?

Ratkaisu: Rajatuotto

$$
\begin{aligned}
p &= 20 - 0.030q \\
\longrightarrow R &= q \cdot p = q(20 - 0.030q) = 20q - 0.030q^2 \\
\longrightarrow MR &= \frac{d}{dq}\left(20q - 0.030q^2\right) = 20 - 0.060q
\end{aligned}
$$

Rajakustannus

$$
\begin{aligned}
C &= 0.02q^2 + 5q + 150 \\
\longrightarrow MC &= \frac{d}{dq}\left(0.02q^2 + 5q + 150\right) = 0.04q + 5
\end{aligned}
$$

Voitonmaksimointi

$$
\begin{aligned}
MC &= MR \\
\Leftrightarrow 0.04q + 5 &= 20 - 0.060q \\
\Leftrightarrow 0.04q + 0.06q &= 20 - 5 \\
\Leftrightarrow 0.1q &= 15 \\
\Leftrightarrow q &= 150
\end{aligned}
$$

Kun $q = 150$, niin voitto on

$$
\begin{aligned}
P(150) = R(150) - C(150) &= (20 \cdot 150 - 0.030 \cdot 150^2) - (0.02 \cdot 150^2 + 5 \cdot 150 + 150) \\
&= 20 \cdot 150 - 0.030 \cdot 150^2 - 0.02 \cdot 150^2 - 5 \cdot 150 - 150 \\
&= 975
\end{aligned}
$$

Vastaus: Voitto on siis suurin mahdollinen kun valmistetaan 150 tuotetta suunnitelujaksossa. Voitto on silloin 975 (€/jakso).

8. Tuotteen kysynnästä tiedämme seuraavat arviot: jos tarjonta on $q_1 = 50$, niin hinta asettu tasolle $p_1 = 20.10$€ja jos tarjonta on $q_2 = 70$, niin hinta on vastaavasti $p_2 = 18.25$€.
a) Arvioi interpoloimalla tuotteen hintaa, kun tarjonta on $q = 55$.
b) Määritä tuotteen markkinoita kuvaava lineaarinen kysyntäfunktio.

Ratkaisu: Kaava:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\
\longrightarrow p(q) &\approx p_1 + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}(q - q_1)
\end{aligned}
$$

a)

$$
\begin{aligned}
p(55) &\approx 20.10 + \frac{18.25 - 20.10}{70 - 50}(55 - 50) \\
&= 20.10 + \frac{-1.85}{20} \cdot 5 = 19.6375 \approx 19.64
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
p(q) &\approx 20.10 + \frac{18.25 - 20.10}{70 - 50}(q - 50) \\
&= 20.10 + \frac{-1.85}{20} \cdot (q - 50) \\
&= 20.10 - 0.0925 \cdot (q - 50) \\
&= 24.725 - 0.0925q
\end{aligned}
$$

9. Erään raaka-aineen kysyntä on 4800 kg/vuosi. Tilauskustannus on 4,00 euro/tilaus ja varaston yksikköylläpitokustannus on 2.00 €/kg/kuukausi.

a) (2p) Mikä on optimaalinen tilauserän koko?
b) (2p) Mitkä ovat varastonhoidon kokonaiskustannukset vuodessa?
c) (2p) Miten monta prosenttia kokonaiskustannus nousee optimiarvosta, jos tilauserää kasvatetaan optimiarvosta 10.0%.

Ratkaisu:

$$
\begin{aligned}
D &= 4800\frac{\text{kg}}{\text{vuosi}} \\
K &= 4.00€ \\
h &= 2.00\frac{€}{\text{kg}\cdot\text{kk}} = 24.00\frac{€}{\text{kg}\cdot\text{vuosi}}
\end{aligned}
$$

a)

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2\cdot 4\cdot 4800}{24}}\text{kg} = 40\text{kg}$$

b)

$$
\begin{aligned}
TC_0 &= \frac{KD}{q_0} + h\cdot\frac{q_0}{2} \\
&= \frac{4.00€\cdot 4800\frac{\text{kg}}{\text{vuosi}}}{40\text{kg}} + 24.00\frac{€}{\text{kg}\cdot\text{vuosi}}\cdot\frac{40\text{kg}}{2} \\
&= 480\frac{€}{\text{vuosi}} + 480\frac{€}{\text{vuosi}} = 960\frac{€}{\text{vuosi}}
\end{aligned}
$$

c) Jos tilauserä onkin 44 kg, niin kokonaiskustannus on

$$
\begin{aligned}
TC_{44} &= \frac{4.00€\cdot 4800\frac{\text{kg}}{\text{vuosi}}}{44\text{kg}} + 24.00\frac{€}{\text{kg}\cdot\text{vuosi}}\cdot\frac{44\text{kg}}{2} \\
&= 436.36\frac{€}{\text{vuosi}} + 528.00\frac{€}{\text{vuosi}} = 964.36\frac{€}{\text{vuosi}}
\end{aligned}
$$

Kustannukset nousivat siis

$$\frac{TC_{44} - TC_0}{TC_0}\cdot 100\% = \frac{964.36 - 960}{960}\cdot 100\% = 0.45\%$$

10. Erään raaka-aineen kysyntä on 1600 kg/vuosi. Tilauskustannus on 30,00 euro/tilaus ja varaston yksikköylläpitokustannus on 1.25 €/kg/kuukausi.

a) (2p) Mikä on optimaalinen tilauserän koko?
b) (2p) Mitkä ovat varastonhoidon kokonaiskustannukset vuodessa?
c) (2p) Raaka-aineen toimittaja antaa sisäänostossa 1,0% määräalennuksen, jos tilauserä on vähintään 50 kg, 2% alennuksen jos tilauserä on vähintään 100 kg ja 3% alennuksen, jos tilauserä on vähintään 150 kg. Raaka-aineen normaali ostohinta on 2,00 €/kg. Mikä on nyt optimaalinen tilauserä?

Ratkaisu:

$$
\begin{aligned}
D &= 1600\frac{\text{kg}}{\text{vuosi}} \\
K &= 30.00€ \\
h &= 1.25\frac{€}{\text{kg}\cdot\text{kk}} = 15.00\frac{€}{\text{kg}\cdot\text{vuosi}}
\end{aligned}
$$

a)

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2\cdot 30\cdot 1600}{15}}\text{kg} = 80\text{kg}$$

b)

$$
\begin{aligned}
TC_0 &= \frac{KD}{q_0} + h\cdot\frac{q_0}{2} \\
&= \frac{30€\cdot 1600\frac{\text{kg}}{\text{vuosi}}}{80\text{kg}} + 15\frac{€}{\text{kg}\cdot\text{vuosi}}\cdot\frac{80\text{kg}}{2} \\
&= 600\frac{€}{\text{vuosi}} + 600\frac{€}{\text{vuosi}} = 1200\frac{€}{\text{vuosi}}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\tilde{TC}(q) &= \frac{KD}{q} + h\cdot\frac{q}{2} + p\cdot D \\
\tilde{TC}(80) &= \frac{30\cdot 1600}{80} + 15\cdot\frac{80}{2} + 1.98\cdot 1600 \\
&= 600 + 600 + 3168 = 4368€/\text{vuosi} \\
\\
\tilde{TC}(100) &= \frac{30\cdot 1600}{100} + 15\cdot\frac{100}{2} + 1.96\cdot 1600 \\
&= 480 + 750 + 3136 = 4366€/\text{vuosi} \\
\\
\tilde{TC}(150) &= \frac{30\cdot 1600}{150} + 15\cdot\frac{150}{2} + 1.94\cdot 1600 \\
&= 320 + 1125 + 3104 = 4549€/\text{vuosi}
\end{aligned}
$$

Edullisinta on siis tilata 100kg erissä (2%:n alennus).

Kaavoja:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}ax^n \quad = \quad n\cdot ax^{n-1}$$

Interpolointi:

$$f(x) \quad \approx \quad f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Varastomallit:

$$\begin{aligned}
&\text{perusmalli} && q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \\
&\text{puutemalli} && q_1 = q_0\sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0\sqrt{\frac{s}{h+s}}, \\
& && TC_1(q) = \frac{KD}{q} + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q} \\
&\text{tuotantomalli} && q_2 = q_0\sqrt{\frac{r}{r-D}}, \quad M_2 = q_0\sqrt{\frac{r-D}{r}}, \\
& && TC_2(q) = \frac{KD}{q} + \frac{hq(r-D)}{2r}
\end{aligned}$$