

1. Laske integraalit

a) $\int (3x^2 - x) dx$ b) $\int_1^4 (2x+1) dx$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int (3x^2 - x) dx &= \frac{3}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C \\ &= \underline{\underline{x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^4 (2x+1) dx &= \left[x^2 + x \right]_1^4 = (4^2 + 4) - (1^2 + 1) \\ &= 16 + 4 - 1 - 1 = \underline{\underline{18}} \end{aligned}$$

2. Tarkista derivoimalla kaavat

$$\begin{aligned} \int e^{-\rho x} dx &= \frac{-1}{\rho} e^{-\rho x} \\ \int x \cdot e^{-\rho x} dx &= \left(\frac{-x}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) e^{-\rho x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{-1}{s} e^{-sx} \right) &= \frac{-1}{s} \frac{d}{dx} (e^{-sx}) = \frac{-1}{s} \cdot (e^{-sx}) \cdot (-s) \\ &= e^{-sx} \quad \text{/. } dx \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{-x}{s} - \frac{1}{s^2} \right) e^{-sx} \right]$$

$$= \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{-x}{s} - \frac{1}{s^2} \right) \right] \cdot e^{-sx} + \left(\frac{-x}{s} - \frac{1}{s^2} \right) \left[\frac{d}{dx} e^{-sx} \right]$$

$$= \frac{-1}{s} e^{-sx} + \left(\frac{-x}{s} - \frac{1}{s^2} \right) \cdot (e^{-sx}) \cdot (-s)$$

$$= \frac{-1}{s} e^{-sx} + \left(x + \frac{1}{s} \right) e^{-sx} = x e^{-sx} \quad \text{/. } dx$$

3. Tarkastellaan kahta kassavirtaa $c_1(t)$ ja $c_2(t)$. Kumpikin kassavirta kestävä 2 vuotta. Ensimmäinen kassavirta on vakiotulovirta 100€/kk. Toisen kassavirran voimakkuus pienenee tasaisesti. Alussa kassavirta on 150€/kk ja lopussa 50€/kk. Laskentakorkokanta on 5%/p.a. ($\rho = \ln 1.05 \frac{1}{\text{vuosi}}$). Laske nykyarvot

$$NA_1 = \int_0^2 e^{-\rho t} 1200 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} dt$$

$$NA_2 = \int_0^2 e^{-\rho t} (1800 - 600 \cdot t) \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} dt$$

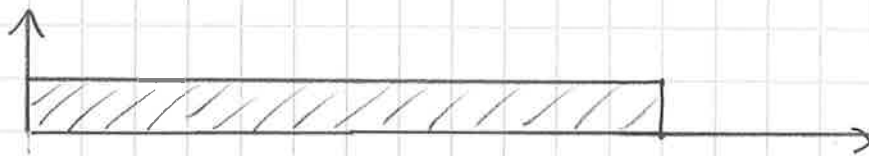
(1) Kivipainpidon mukaan vuodella kertyy
24kk, 100€/kk = 2400 €

(2) Alussa $c_2(0) = 150$ €/kk ja lopussa $c_2(2) = 50$ €/kk
Keskimmäinen $\bar{c}_2 = 100$ €/kk \rightarrow kertymä 2400 €

$$NA_1 = 1200 \text{ €} \int_0^2 e^{-\rho t} dt = 1200 \text{ €} \left[-\frac{1}{\rho} e^{-\rho t} \right]_0^2$$

$$= 1200 \text{ €} \left(-\frac{1}{\rho} e^{-\rho \cdot 2} - \left(-\frac{1}{\rho} e^0 \right) \right) = \frac{1200 \text{ €}}{\ln(1,05)} \left(1 - \frac{1}{1,05^2} \right)$$

$$= \underline{\underline{2286,62 \text{ €}}}$$

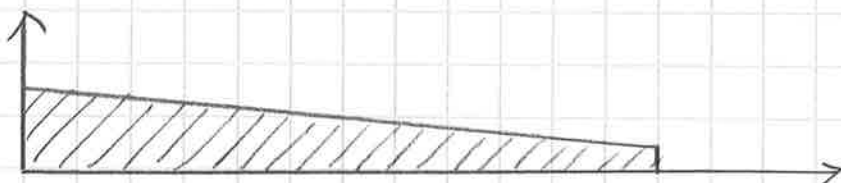


$$NA_2 = 1800 \text{ €} \int_0^2 e^{-\rho t} dt - 600 \text{ €} \int_0^2 t e^{-\rho t} dt$$

$$= \frac{1800 \text{ €}}{\rho} \left(1 - \frac{1}{1,05^2} \right) - 600 \text{ €} \int_0^2 \left(-\frac{t}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) e^{-\rho t} dt$$

$$= \frac{1800 \text{ €}}{\ln(1,05)} \left(1 - \frac{1}{1,05^2} \right) - 600 \text{ €} \left[\left(\frac{-2}{\ln 1,05} - \frac{1}{(\ln 1,05)^2} \right) \frac{1}{1,05^2} + \frac{1}{(\ln 1,05)^2} \right]$$

$$= 3429,93 \text{ €} - 1124,72 \text{ €} = \underline{\underline{2305,23 \text{ €}}}$$



4. Yritys A valmistaa sairaalatarvikkeita. Yritys laskee saavansa toiminnasta nettotulovirran 10 000€/kuukausi.

Yritys B arvioi pystyvänsä parempien asiakaskontaktiensa avulla parempaan tulokseen siten, että samalla tuotantokoneistolla se saisi vakiotulovirran 15 000 euroa kuukaudessa.

Alussa yritys B joutuisi tekemään 20 000€ alkuinvestoinnit markkinointiin. Onko ajateltavissa, että yritys A myisi tuotantokoneistonsa yritykselle B ja missä rajoissa myyntihinnan pitäisi olla, kun yrityksen käyttävät laskelmissaan korkointensiteettejä $\rho_A = 0.12$ ja $\rho_B = 0.14$?

$$NNA_A = \frac{12 \cdot 10000 \text{ €/vuosi}}{0,12 \text{ /vuosi}} = \underline{\underline{1000000 \text{ €}}}$$

$$NNA_B = -20000 \text{ €} + \frac{12 \cdot 15000 \text{ €/vuosi}}{0,14 \text{ /vuosi}} = \underline{\underline{1265700 \text{ €}}}$$

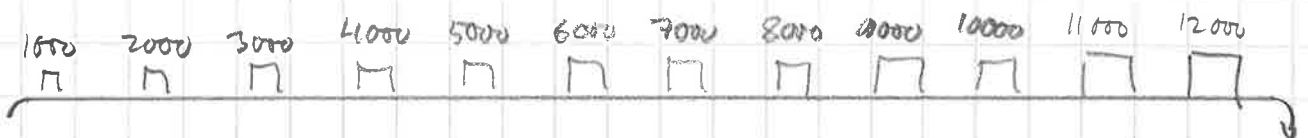
Vastaus: Kumpikin voisi syntyä, jos neuvotteluissa päädytään välille 1,00 ME ... 1,26 ME

5. Yrityksellä on tuotantolinja, jossa on 12 työpistettä, jokaisessa työpisteessä koottavaan tuotteeseen asennetaan osia noin 1000€edestä. Tuotteen valmistaminen vie aikaa 48 tuntia (eli työpisteet työskentelevät 4h/tuote). Tuotanto on järjestetty jatkuvana kolmivuorotyönä, jolloin tuotteita valmistuu 6kpl/päivä ja 180 kpl/kk.

a) Laske liukuhinnalla oleviin osiin sitoutunut pääoma.

b) Mikä on tämän sitoutuneen pääoman kustannus (€/kk), kun laskentakorko on 8% p.a.?

c) Minkä verran tämä lisää yhden tuotteen valmistuskustannusta?



a) Hinnalla olevien osien arvo

$$1000 \text{ €} + 2000 \text{ €} + \dots + 12000 \text{ €} = 12 \cdot \frac{1000 \text{ €} + 12000 \text{ €}}{2} = \underline{\underline{78000 \text{ €}}}$$

b) Vuotuinen pääomakustannus on

$$0,08 \cdot 78000 \text{ €} = 6240 \text{ €/vuosi}$$

c) tuotantoon sitoutuneen pääoman kustannus tuotteelta kohden on

$$\frac{6240 \text{ €/vuosi}}{12 \cdot 180 \text{ kpl/vuosi}} = 2,89 \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$$

6. Taulukossa on erään tuotteen hinnat peräkkäisinä vuosina.

a) Laske tuotteen hintaindeksin arvot samoille vuosille, kun perusvuotena on 2000.

b) Laske vuotuiset kasvutekijät ja kasvuprosentit.

c) Laske koko aikajaksolle hinnan keskimääräinen kasvuprosentti.

vuosi	hinta	indeksi	kasvutek.	kasvupos.
1998	28,50	101,8		
1999	29,00	103,6	1,0175	1,75%
2000	28,00	100,0	0,9655	-3,45%
2001	28,80	102,9	1,0286	2,86%
2002	29,10	103,9	1,0104	1,04%
2003	30,00	107,1	1,0309	3,09%
2004	31,00	110,7	1,0333	3,33%
2005	31,20	111,4	1,0065	0,65%
2006	32,00	114,3	1,0256	2,56%
2007	33,00	117,9	1,0313	3,13%
2008	33,20	118,6	1,0061	0,61%
2009	33,50	119,6	1,0090	0,90%
2010	34,00	121,4	1,0149	1,49%

c) kasvutekijöiden keskiarvo on

$$\left(\frac{P_{99}}{P_{98}} \cdot \frac{P_{00}}{P_{99}} \cdot \frac{P_{01}}{P_{00}} \cdot \dots \cdot \frac{P_{10}}{P_{09}} \right)^{\frac{1}{12}}$$

$$= \left(\frac{P_{10}}{P_{98}} \right)^{\frac{1}{12}} = \left(\frac{X_{2010}}{X_{1998}} \right)^{\frac{1}{12}} = \left(\frac{121,4}{101,8} \right)^{\frac{1}{12}}$$

$$= 1,01478$$

→ keskimääräinen vuosikasvu on 1,48%

(viimeisen sarakkeen lukujen keskiarvo on 1,4967 ~ 1,50)

7. Erään tuotekorin osalta tiedetään vuosien 2000 ja 2010 hinnat ja ostojen määrät. Perusajankohta on nyt 2000 ja vertailuajankohta 2010

tuote	2000			2010		
	p_0	q_0	a_0	p_t	q_t	a_t
1	15,00	100		10,00	300	
2	8,00	500		15,00	100	
3	30,00	20		20,00	200	

- a) Laske Laspeyres'in ja Paaschen hinta-indeksit.
 b) Kerro sanallisesti, miksi indeksit eroavat niin paljon.

Indeksikaavoja

$$\text{Laspeyres} \quad P_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t_0;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t_0;i}} \cdot 100, \quad Q_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t_0;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t_0;i}} \cdot 100$$

$$\text{Paaschen} \quad P_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t;i}} \cdot 100, \quad Q_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t;i}} \cdot 100$$

$$a) P_{2000,2010}^L = \frac{10\text{€} \cdot 100 + 15\text{€} \cdot 500 + 20\text{€} \cdot 20}{15\text{€} \cdot 100 + 8\text{€} \cdot 500 + 30\text{€} \cdot 20} \cdot 100 = 145,90$$

$$P_{2000,2010}^P = \frac{10\text{€} \cdot 300 + 15\text{€} \cdot 100 + 20\text{€} \cdot 200}{15\text{€} \cdot 300 + 8\text{€} \cdot 100 + 30\text{€} \cdot 200} \cdot 100 = 75,2$$

$$PF = (P^L \cdot P^P)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{145,9 \cdot 75,2} = 104,7$$

b) Laspeyresin indeksissä suurimman painon saa tuote #2, jonka hinta nousi paljon.

Paaschen indeksissä suurimman painon saa tuote #1, joka halveni merkittävästi.

• Erän aiheuttaa erilaiset painotukset.