

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & 1 & 3 \\ & 3 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} & 1 & 3 \\ \textcircled{1} & 0 & 4 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y = 3 & (1) \\ 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow y = 2, \quad (1) \rightarrow x + 2 = 3 \rightarrow x = 1$$

Vastaus:  $x = 1, y = 2$

Tarkistus  $\begin{cases} 1 + 2 = 3 & ok \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 13 & ok \end{cases}$

2. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 4x + 5y - 3z = 3 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & -2 & 2 \\ & 2 & 1 & 3 \\ & 4 & 5 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 2 \cdot 4 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} & 1 & 2 & 2 \\ & 0 & \textcircled{-3} & -1 \\ & 0 & -3 & -5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} & 1 & 2 & 2 \\ & 0 & -3 & -1 \\ & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \leftarrow \text{epä-tori}$$

Vastaus: Ratkaisujoukko on tyhjä

### 3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 5y = 8 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 2 \cdot 4 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -4 \end{array} \right) \text{kop. 2}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 & (1) \\ -3y = -4 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow y = \frac{4}{3} \quad (1) \rightarrow x + 2 \cdot \frac{4}{3} = 3 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Vastaus:  $x = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3}$

Tarkistus  $\begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2 & \text{ok} \\ 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8 & \text{ok} \\ \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{9}{3} = 3 & \text{ok} \end{cases}$

### 4. Etsi ainakin yksi ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 3x + 5y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 7 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ -y - 5z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 - z & (1) \\ -y = 7 + 5z & (2) \end{cases}$$

Valitaan  $z = a$ , (2)  $\rightarrow y = -7 - 5a$   
 (1)  $\rightarrow x + 2(-7 - 5a) = -1 - a$

$$\begin{aligned} x &= -1 - a + 14 + 10a \\ x &= 13 + 9a \end{aligned}$$

$$V: \begin{cases} x = 13 + 9a \\ y = -7 - 5a \\ z = a \end{cases}$$

Tark:  $(13 + 9a) + 2(-7 - 5a) + a = 13 + 9a - 14 - 10a + a = -1$  ok

$3(13 + 9a) + 5(-7 - 5a) - 2a = 39 + 27a - 35 - 25a - 2a = 4$  ok

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)

a)  $A+B$ , b)  $A+C$ , c)  $B+C$

$$a) \quad \begin{matrix} A+B \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \begin{matrix} A+C \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 2 \end{matrix} \quad \text{ei voi laskea}$$

$$c) \quad \begin{matrix} B+C \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 2 \end{matrix} \quad \text{ei voi laskea}$$

6. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)

a)  $AB$ , b)  $BA$ , c)  $AC$ , d)  $CA$ , e)  $C^T A$

$$a) \quad \begin{matrix} AB \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 3 \\ \text{ok} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \begin{matrix} BA \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 3 \\ \text{ok} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 6 & 9 & -2 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad \begin{matrix} AC \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 2 \\ \text{ok} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \quad \begin{matrix} CA \\ 3 \times 2 \quad 3 \times 2 \\ \checkmark \end{matrix} \quad \text{ei voi laskea}$$

$$e) \quad \begin{matrix} C^T A \\ 2 \times 3 \quad 3 \times 3 \\ \text{ok} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -13 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Kirjoita matriisiyhtälö

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

tavalliseksi yhtälöryhmäksi. Ratkaise  $x$  ja  $y$  yhtälöryhmästä. Tarkista lopuksi, että matriisiyhtälö toteutuu.

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 2y = 1 \\ 3x + 7y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ 3 & 7 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-3 \\ -}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 & (1) \\ y = 2 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow y = 2, \quad (1) \rightarrow x + 2 \cdot 2 = 1 \rightarrow x = -3$$

$$\text{Siis } x = -3, y = 2$$

$$\text{Tarkistus } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{ok}$$

8. Matriisin  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$  käänteismatriisi  $K$  on  $2 \times 2$ -matriisi, jolle

$$K \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jos  $K$  tunnetaan, niin edellisen tehtävän matriisiyhtälö voidaan ratkaista seuraavasti

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & K \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a) Osoita, että  $K = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$  on matriisin  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$  käänteismatriisi.

b) Ratkaise matriisiyhtälö  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$  käänteismatriisin avulla.

$$a) \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ok$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ok$$

$$b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = -3 \\ y = 2 \end{matrix}$$

8. Tuotteiden A, B ja C sisäänostohinnat ovat

tuote	A	B	C
hinta	2.50	0.50	1.00

Sijoitetaan vastaavat luvut matriisiin (hintavektori)

$$p = ( 2.5 \quad 0.5 \quad 1.0 ).$$

Yritykse kolme osastoa: myyntiosasto (M-os), valmistusosasto (V-os), suunnitteluosasto (S-os) ja Helsingin toimisto (H-to) ostavat tammikuussa tuotteita A, B ja C seuraavan taulukon mukaiset määrät

tuote	A	B	C
M-os	20	30	0
V-os	10	50	20
S-os	0	10	40
H-to	30	10	10

Sijoitetaan nämäkin luvut matriisiin (ostomatriisi)

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Laske matriisilauseke  $pD^T$ . (Mitä edellä saadun vektorin koordinaatit merkitsevät?)

b) Onko lauseke  $pD$  järkevä (mikä sen arvo on)?

c) Onko lauseke  $Dp^T$  järkevä (mikä sen arvo on)?

d) Onko lauseke  $Dp$  järkevä (mikä sen arvo on)?

$$a) \underset{\substack{1 \times 3 \quad 3 \times 4 \\ \text{ok}}}{P D^T} = (2,5 \quad 0,5 \quad 1,0) \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 & 30 \\ 30 & 50 & 10 & 10 \\ 0 & 20 & 40 & 10 \end{pmatrix} = (65 \quad 70 \quad 45 \quad 90)$$

b)  $\underset{\substack{1 \times 3 \quad 4 \times 3 \\ \vee}}{P D}$  ei voi laskea

$$c) \underset{\substack{4 \times 3 \quad 3 \times 1 \\ \text{ok}}}{D P^T} = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \\ 1,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 70 \\ 45 \\ 90 \end{pmatrix}$$

d)  $\underset{\substack{4 \times 3 \quad 1 \times 3 \\ \vee}}{D P}$  ei voi laskea

Selitys  $D P^T$ :n toisen rivin alkunäkö

$$D P^T = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \\ 1,0 \end{pmatrix} = 10 \cdot 2,5 + 50 \cdot 0,5 + 20 \cdot 1,0$$

$\uparrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   
 A:n hinta B:n hinta C:n hinta  
 V-os osti 10 A:ta V-os osti 50 B:ta V-os osti 20 C:ta

= V-osaston ostot ylösentä