

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

7. harjoitus, (to 23.11.2017)

1. Yritys valmistaa muoviraaka-aineesta kahta tuotetta A ja B. Tuotteen A valmistaminen vie aikaa 15min ja raaka-ainetta 10kg. Tuotteen B valmistaminen vie aikaa 12min ja raaka-ainetta 15kg. Raaka-ainetta on olemassa 2500 kg/viikko ja laitteisto, jolla tuotteita valmistetaan on käytössä 40 tuntia viikossa. Yhden A-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 5 euroa ja yhden B-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 7 euroa. Mahdollisesti käyttämättä jäänyt muoviraaka-aine voidaan myydä hintaan 500 euroa/tonni. Määrittele päätösmuuttujat ja muodosta lp-malli myyntivoiton maksimoimiseksi. (Älä ratkaise mallia.)

Päätösmuuttujat

x_1 : tuotteen A valmistus (kpl/viikko)

x_2 : tuotteen B valmistus (kpl/viikko)

Raaka-aineen käyttö

A:n valmistus tarvitsee $10x_1$ (kg/viikko)

B:n valmistus tarvitsee $15x_2$ (kg/viikko)

Resurssi 2500 (kg/viikko)

Ajan käyttö

A:n valmistus $15x_1$ (min/viikko)

B:n valmistus $12x_2$ (min/viikko)

Resurssi $40 \text{ h/viikko} = 60 \cdot 40 \text{ min/viikko}$
 $= 2400 \text{ min/viikko}$

Käyttämättä jäänyt raaka-aine

- tehdään siitä kolmas päätösmuuttuja

x_3 : raaka-aineen myynti (kg/viikko)

Tavoitefunktio:

$$z = 5x_1 + 7x_2 + 0,5x_3$$

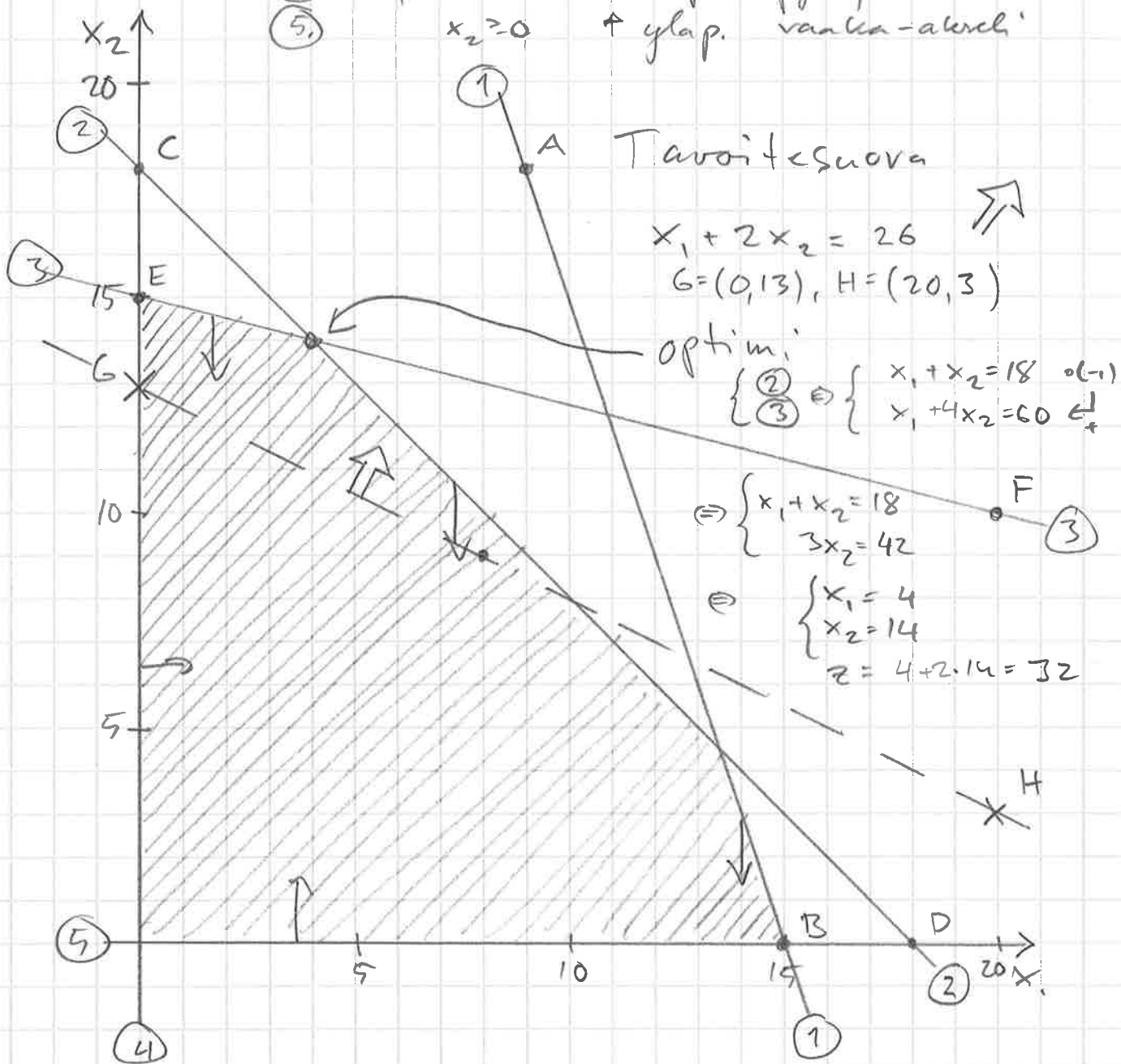
LP-Malli

max	$z = 5x_1 + 7x_2 + 0,5x_3$	
ehdoin	$10x_1 + 15x_2 + x_3 \leq 2500$	(kg)
	$15x_1 + 12x_2 \leq 2400$	(min)
	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	

2. Ratkaise graafisesti seuraava lp-malli

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{ehdoin} \quad 3x_1 + x_2 &\leq 45 \\ x_1 + x_2 &\leq 18 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Rajoittavat
- ① $3x_1 + x_2 \leq 45$ ↓ alap.k. A=(9,18), B=(15,0)
 - ② $x_1 + x_2 \leq 18$ ↓ alap.k. C=(0,18), D=(18,0)
 - ③ $x_1 + 4x_2 \leq 60$ ↓ alap.k. E=(0,15), F=(20,10)
 - ④ $x_1 \geq 0$ → oik.p. pystyakseli
 - ⑤ $x_2 \geq 0$ ↑ ylap. vaakakakseli



Vastaus: optimissa $x_1=4, x_2=14$ ja $z=32$

3. Pienyritys valmistaa kahta tuotetta 1 ja 2, ja myy kaiken valmistamansa. Kumpaakin tuotetta käsitellään kolmella osastolla seuraavan taulukon mukaisesti.

tuote	tuotantoaika (tuntia)		
	os. A	os. B	os. C
1	4	2	8
2	4	4	4

Kullakin osastolla käytettävissä oleva työvoima on rajallinen siten, että työtunteja on osastoilla viikossa käytettävissä seuraavasti

osasto	työtunteja viikossa
A	320
B	240
C	400

Kate (myyntitulo - valmistuskustannukset) yhdeltä "1"-tuotteelta on 300€ ja kate yhdeltä "2"-tuotteelta 500€.

Muodosta LP-malli yrityksen kokonaiskatteen maksimoimiseksi. (Älä ratkaise mallia.)

Pääosan muuttujat
 x_1 = tuotteen 1 tuotanto (kpl/vko)
 x_2 = tuotteen 2 tuotanto (kpl/vko)

LP-malli

$$\begin{array}{l} \max \quad 300x_1 + 500x_2 \\ \text{ehdoin} \quad 4x_1 + 4x_2 \leq 320 \\ \quad \quad \quad 2x_1 + 4x_2 \leq 240 \\ \quad \quad \quad 8x_1 + 4x_2 \leq 400 \end{array}$$

4. Edellisessä tehtävässä yrityksen työaika-resurssi on 960 tuntia/viikossa eli 24 työntekijää. a) Pohdi seuraavaa kysymystä: Jos yritykselle tarjoutuu mahdollisuus palkata kaksi uutta työntekijää, niin miten tämä uusi resurssi allokoidaan (sijoitetaan) eri osastoille? b) Pohdi seuraavaa kysymystä: Jos samalla, kun saadaan kaksi uutta työntekijää, on mahdollista kouluttaa vanhojakin työntekijöitä, niin miten työresurssi allokoidaan osastoille yrityksen voiton maksimoimiseksi?

- a) Päätös muuttujat
 w_A : lisäresurssi osastolle A
 w_B : lisäresurssi osastolle B
 w_C : lisäresurssi osastolle C
 lisäksi $w_A + w_B + w_C = 80$

LP-malli

$$\left\{ \begin{array}{l} \max z = 300x_1 + 500x_2 \\ \text{ehdoin} \quad 4x_1 + 4x_2 \leq 320 + w_A \\ \quad \quad 2x_1 + 4x_2 \leq 240 + w_B \\ \quad \quad 8x_1 + 4x_2 \leq 400 + w_C \\ \quad \quad w_A + w_B + w_C = 80 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \max z = 300x_1 + 500x_2 \\ \text{ehdoin} \quad 4x_1 + 4x_2 - w_A \leq 320 \\ \quad \quad 2x_1 + 4x_2 - w_B \leq 240 \\ \quad \quad 8x_1 + 4x_2 - w_C \leq 400 \\ \quad \quad w_A + w_B + w_C = 80 \end{array} \right.$$

- b) Päätös muuttujat
 b_A : työresurssi osastolla A
 b_B : työresurssi osastolla B
 b_C : työresurssi osastolla C
 lisäksi $b_A + b_B + b_C = 1040$

LP-malli

$$\left\{ \begin{array}{l} \max z = 300x_1 + 500x_2 \\ \text{ehdoin} \quad 4x_1 + 4x_2 - b_A \leq 0 \\ \quad \quad 2x_1 + 4x_2 - b_B \leq 0 \\ \quad \quad 8x_1 + 4x_2 - b_C \leq 0 \\ \quad \quad b_A + b_B + b_C = 1040 \end{array} \right.$$

5. a) Piirrä seuraavan LP-mallin käypä alue.

$$\begin{array}{l} \min z = x_1 - 5x_2 \\ \text{ehdoin} \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ \quad \quad \quad x_1 + x_2 \geq 14 \\ \quad \quad \quad x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ \quad \quad \quad -x_1 + x_2 \leq 10 \\ \quad \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

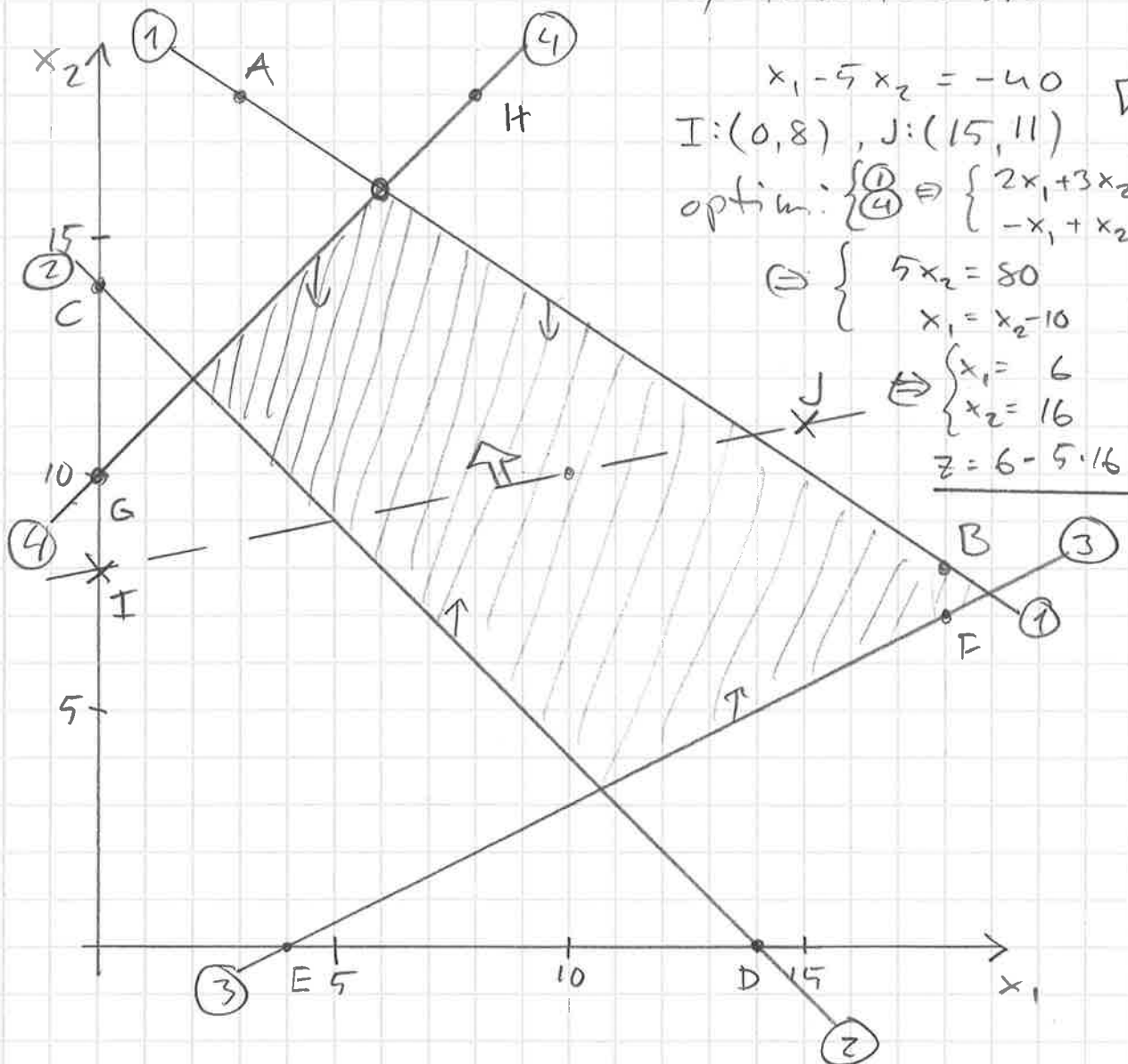
b) Ratkaise malli.

a) rajoittavat

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} & 2x_1 + 3x_2 \leq 60 \quad \downarrow \quad A:(3,18), B:(18,8) \\ \textcircled{2} & x_1 + x_2 \geq 14 \quad \uparrow \quad C:(0,14), D:(14,0) \\ \textcircled{3} & x_1 - 2x_2 \leq 4 \quad \uparrow \quad E:(4,0), F:(18,7) \\ \textcircled{4} & -x_1 + x_2 \leq 10 \quad \downarrow \quad G:(0,10), H:(8,18) \end{array}$$

b) Tavoite suora

$$\begin{array}{l} x_1 - 5x_2 = -40 \quad \Rightarrow \\ I:(0,8), J:(15,11) \\ \text{optim: } \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 60 \\ -x_1 + x_2 = 10 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 5x_2 = 80 \\ x_1 = x_2 - 10 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 16 \end{cases} \\ \underline{z = 6 - 5 \cdot 16 = -74} \end{array}$$



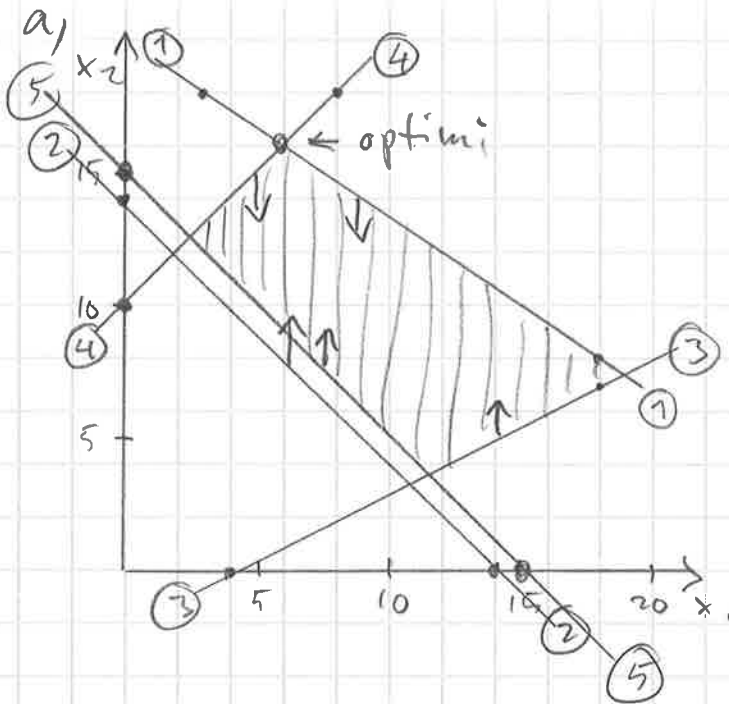
Vastaus: optimissa $x_1 = 6, x_2 = 16$ ja $z = -74$

6. a) Miten tehtävän 5 optimiratkaisu muuttuu, jos rajoitteisiin lisätään uusi rajoite

$$x_1 + x_2 \geq 15$$

b) Miten edellisen tehtävän optimiratkaisu muuttuu, jos rajoitteisiin lisätään uusi rajoite

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

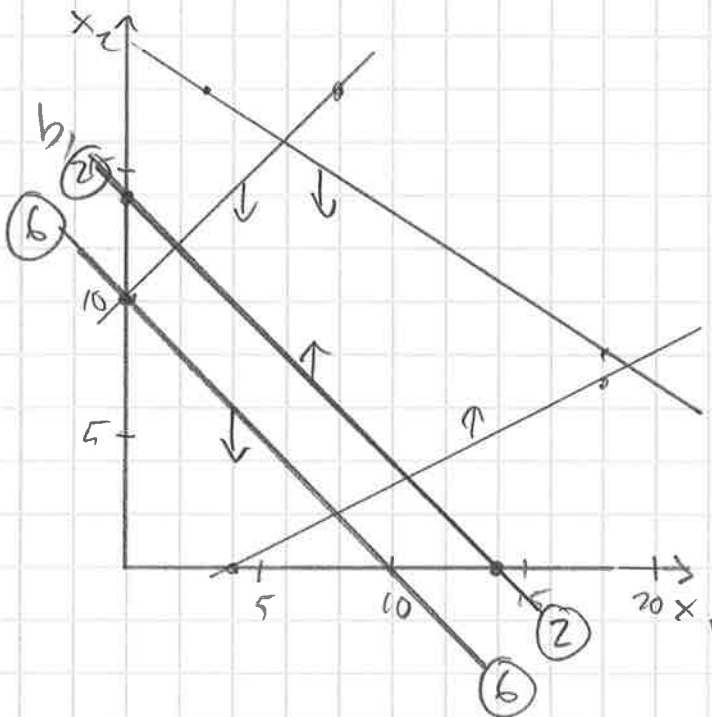


$$x_1 + x_2 \geq 15 \quad \uparrow$$

K: (0, 15) L: (15, 0)

V: Käypä alue
pienenee, mutta
optimipiste (6, 16)
säilyy optima

optimiratkaisu
 ei muutu



$$x_1 + x_2 \leq 10 \quad \downarrow$$

M: (0, 10), N: (10, 0)

V: käypä alue
tyhjenee, ei ratkaisua