Etelä-Pohjanmaan Opisto, syksy 2017

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

8. harjoitus, (pe 24.11.2017)

1. Tarkastellaan matriisia

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

Jonka käänteismatriisi on

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tarkista laskemalla, että annettu $\boldsymbol{A}$:n käänteismatriisi on pätevä.
Siis tarkista, että $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ ja $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$.
b) Ratkaise tämän tiedon avulla x ja y yhtälöparista

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) $$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ok}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix}$$

tarkistus $$\begin{cases} 2 \cdot 8 + (-13) = 3 & \text{ok} \\ 5 \cdot 8 + 3 \cdot (-13) = 1 & \text{ok} \end{cases}$$ //

2. Merkitään tehtävän 1c) yhtälöryhmän ratkaisua vektorina $(x_0 \ y_0)^T$. Merkitään vektorilla $(x_1 \ y_1)^T$ sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta ensimmäisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Merkitään vektorilla $(x_2 \ y_2)^T$ sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta toisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Toisin sanoen

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Laske vektorit $(x_1 \ y_1)^T$ ja $(x_2 \ y_2)^T$.

Huomaa, että yhtälöryhmän kerroinmatriisin $\mathbf{A}$ *käänteismatriisi* $\mathbf{A}^{-1}$ *on nyt tiedossamme. Se esiintyi tehtävässä 1. Tämän vuoksi ylivoimaisesti helpoin tapa ratkaista yhtälöryhmät (2) ja (3) on käyttää periaatetta: "ratkaisu on* $\mathbf{A}^{-1}$ *kertaa RHS".*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix}$$

3. a) Kun yhtälöryhmä (1) muutettiin yhtälöryhmäksi (2), niin ensimmäisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Laske ratkaisun muutos

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

b) Kun yhtälöryhmä (1) muutettiin yhtälöryhmäksi (3), niin toisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Laske ratkaisun muutos

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

c) Voitko löytää nämä muutosvektorit suoraan käänteismatriisista $\mathbf{A}^{-1}$?

a) $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) A^{-1}:n sarake 1

A^{-1}:n sarake 2

4. Laske determinantit

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - (-1)\cdot(-3)$

$= 2 - 3 = \underline{\underline{-1}}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2\cdot(1-0) - 0 + 1\cdot(5-3)$

$= 2 - 0 + 2 = \underline{\underline{4}}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 2 = \underline{\underline{12}}$

5c) II tapa (Minorikehitelmä)

$\det(M) = -1$ laskettiin a-kohdassa

Minorit

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad m_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad m_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$m_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad m_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad m_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad m_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{21} & m_{31} \\ -m_{12} & m_{22} & -m_{32} \\ m_{13} & -m_{23} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} (3) & -(2) & (-2) \\ -(2) & (1) & -(-1) \\ (0) & -(0) & (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Olkoon tutkittavina matriisit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{ja} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Laske a) determinantti b) transpoosi ja c) käänteismatriisi matriisille $\boldsymbol{M}$.

a) $$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +0 - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3 - 4 = \underline{-1}$$

b) $$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 2 \quad \cdot(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 2 \quad \cdot(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Laske a) determinantti b) transpoosi ja c) käänteismatriisi matriisille $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a)
$$\det(N) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 0 - 0 + 1 \cdot (1-3) = \underline{\underline{-2}}$$

b)
$$N^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ + \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot\frac{1}{2} \; :(-2) \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \cdot\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow N^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & -0{,}5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Minorit
$$n_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad n_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad n_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$
$$n_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad n_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad n_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$n_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad n_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad n_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$N^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} (1) & -(-1) & (-1) \\ -(1) & (-3) & -(-1) \\ (-2) & -(0) & (0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & -0{,}5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Alla on taulukossa esitettynä erään yrityksen tuotannon jakautuminen ja panosten käyttö tilikaudella. Laske tuotteiden omakustannusarvot.

		Os1	Os2	Os3	myynti (kpl)	yhteensä (kpl)	hinta (€/kpl)
	Os1	50	100	0	850	1000	p_1
	Os2	10	40	50	400	500	p_2
	Os3	20	0	30	200	250	p_3
raaka-aine 1	tt1	300	0	700		1000	1.00
raaka-aine 2	tt2	400	400	0		800	10.00
työvoima 1	tt3	70	100	150		320	20.00
työvoima 2	tt4	10	15	10		35	50.00

$$A = \begin{pmatrix} 50/1000 & 100/500 & 0/250 \\ 10/1000 & 40/500 & 50/250 \\ 20/1000 & 0/500 & 30/250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}050 & 0{,}200 & 0 \\ 0{,}010 & 0{,}080 & 0{,}200 \\ 0{,}020 & 0 & 0{,}120 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 300/1000 & 0/500 & 700/250 \\ 400/1000 & 400/500 & 0/250 \\ 70/1000 & 100/500 & 150/250 \\ 10/1000 & 15/500 & 10/250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}300 & 0 & 2{,}800 \\ 0{,}400 & 0{,}800 & 0 \\ 0{,}070 & 0{,}200 & 0{,}600 \\ 0{,}010 & 0{,}030 & 0{,}040 \end{pmatrix}$$

$$I-A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}20 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}08 & 0{,}20 \\ 0{,}02 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}20 & 0 \\ -0{,}01 & 0{,}92 & -0{,}20 \\ -0{,}02 & 0 & 0{,}80 \end{pmatrix}$$

$$(I-A)^{-1} \underset{\text{Excel}}{=} \begin{pmatrix} 1{,}056257 & 0{,}229621 & 0{,}057405 \\ 0{,}017222 & 1{,}090700 & 0{,}272675 \\ 0{,}026406 & 0{,}005741 & 1{,}251435 \end{pmatrix}$$

Omakustannusarvot

$$p^T = c^T B(I-A)^{-1} =$$

$$\underset{\text{Excel}}{=} \begin{pmatrix} 7{,}18 & 16{,}23 & 22{,}78 \end{pmatrix}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1																	
2																	
3								Myynti	Yht.	hinta							
4					Os1	Os2	Os3	(kpl)	(kpl)	(€/kpl)							
5				Os1	50	100	0	850	1000	7.18							
6				Os2	10	40	50	400	500	16.23							
7				Os3	20	0	30	200	250	22.78							
8			Raaka-aine 1	tt1	300	0	700		1000	1.00							
9			Raaka-aine 2	tt2	400	400	0		800	10.00							
10			Työvoima 1	tt3	70	100	150		320	20.00							
11			Työvoima 2	tt4	10	15	10		35	50.00							
12																	
13					0.050	0.200	0.000								1	0	0
14				A =	0.010	0.080	0.200							I =	0	1	0
15					0.020	0.000	0.120								0	0	1
16					0.300	0.000	2.800										
17				B =	0.400	0.800	0.000										
18					0.070	0.200	0.600										
19					0.010	0.030	0.040										
20					0.950	-0.200	0.000	'=O13:Q15-E13:G15									
21			I-A =		-0.010	0.920	-0.200										
22					-0.020	0.000	0.880										
23					1.0561	0.2296	0.0522	'=MINVERSE(E20:G22)									
24			(I-A)^(-1) =		0.0167	1.0906	0.2479										
25					0.0240	0.0052	1.1375										
26																	
27			p^T =		7.177	16.234	22.780	'=MMULT(TRANSPOSE(J8:J11),MMULT(E16:G19,E23:G25))									

8. Kasvata edellisen tehtävän yksikköhintoja siten, että jokaisesta tuotteesta saadaan 15% kate. Laske sitten jokaisen osaston kokonaistuotokset, myyntituotot ja tuotannontekijöiden kustannukset, kun lopputuotteiden myynti muuttuu seuraavan taulukon mukaiseksi.

	myynti (kpl)
Os1	500
Os2	1000
Os3	400

Miten suuren katteen yritys kokonaisuudessaan saa ?

Jos omakustannusarvo on p_0 ja korotettu hinta on p niin, että kate on 15 %, niin

$$\frac{p-p_0}{p} = \frac{15}{100} \rightarrow p - p_0 = 0{,}15p$$

$$\Leftrightarrow 0{,}85p = p_0$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{1}{0{,}85} p_0 = 1{,}17647 \, p_0$$

kokonaistuotos

$$\bar{x}_{uusi} = \underbrace{(I-A)^{-1}}_{\text{otetaan vanhasta datasta, koska tämä muuttuu hitaasti}} \bar{d}_{uusi}$$

$$\underset{\text{Excel}}{=} \begin{pmatrix} 778{,}5 \\ 1198{,}1 \\ 472{,}2 \end{pmatrix}$$

Tuotannontekijöiden tarve

$$\bar{r}_{uusi} = B\bar{x} \underset{\text{Excel}}{=} \begin{pmatrix} 1555{,}8 \\ 1269{,}9 \\ 577{,}5 \\ 62{,}6 \end{pmatrix}$$

Tuotto	$\bar{p}^T \bar{d}$	$= 34040{,}79$
− kust	$-\bar{c}^T \bar{r}$	$= -28934{,}67$
kate		$5106{,}12$

$$\text{kate \%} = \frac{5106{,}12}{34040{,}79} \cdot 100\,\% = 15\,\%$$

//.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1																	
2			Lähtötilanne														
3								Myynti	Yht.	hinta	Tuotot / kust	yht					
4					Os1	Os2	Os3	(kpl)	(kpl)	(€/kpl)							
5				Os1	50	100	0	850	1000	7.18	6100.27						
6				Os2	10	40	50	400	500	16.23	6493.63						
7				Os3	20	0	30	200	250	22.78	4556.09	17150.00					
8			Raaka-aine 1	tt1	300	0	700		1000	1.00	1000.00						
9			Raaka-aine 2	tt2	400	400	0		800	10.00	8000.00						
10			Työvoima 1	tt3	70	100	150		320	20.00	6400.00						
11			Työvoima 2	tt4	10	15	10		35	50.00	1750.00	-17150.00					
12											Kate =	0.00					
13					0.050	0.200	0.000				Katepros =	0.00%			1	0	0
14				A =	0.010	0.080	0.200							I =	0	1	0
15					0.020	0.000	0.120								0	0	1
16					0.300	0.000	2.800										
17				B =	0.400	0.800	0.000										
18					0.070	0.200	0.600										
19					0.010	0.030	0.040										
20					0.950	-0.200	0.000	'=O13:Q15-E13:G15									
21			I-A =		-0.010	0.920	-0.200										
22					-0.020	0.000	0.880										
23					1.0561	0.2296	0.0522	'=MINVERSE(E20:G22)									
24			(I-A)^(-1) =		0.0167	1.0906	0.2479										
25					0.0240	0.0052	1.1375										
26																	
27			p^T =		7.177	16.234	22.780	'=MMULT(TRANSPOSE(J8:J11),MMULT(E16:G19,E23:G25))									
28																	

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
29																	
30																	
31			Uusi tilanne														
32								Myynti	Yht.	hinta	Tuotot / kust	yht					
33					Os1	Os2	Os3	(kpl)	(kpl)	(€/kpl)							
34				Os1				500	778.5	8.44	4221.64						
35				Os2				1000	1198.1	19.10	19098.92						
36				Os3				400	472.2	26.80	10720.22	34040.79					
37			Raaka-aine 1	tt1					1555.8	1.00	1555.83						
38			Raaka-aine 2	tt2					1269.9	10.00	12698.81						
39			Työvoima 1	tt3					577.5	20.00	11549.15						
40			Työvoima 2	tt4					62.6	50.00	3130.87	-28934.67					
41											Kate =	5106.12					
42											Katepros =	15.00%					
43					778.5	'=MMULT(E23:G25,H34:H36)											
44			x_uusi =		1198.1												
45					472.2												
46					1555.8	'=MMULT(E16:G19,E43:E45)											
47			r_uusi =		1269.9												
48					577.5												
49					62.6												
50																	
51			Taulukko saadaan täytettyä odotusarvoilla, toteuttamalla seuraavat kaavat														
52			soluun	kaava													
53			'E34:E40	'=E13:E19 * I34													
54			'F34:F40	'=F13:F19 * I35													
55			'G34:G40	'=G13:G19 * I36													