Etelä-Pohjanmaan Opisto, syksy 2017

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

9. harjoitus, (to 30.11.2017)

1. Määritä a) rivioperaatioiden avulla b) adjungaatin avulla käänteismatriisi matriisille

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Ratkaise Cramerin kaavoilla yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} x & + & 3y & - & z & = & 5 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{cases}$$

3. Kaupungissa on 10 000 taloutta, jossa pyykki pestää käyttäen jotakin kolmesta pesuaineesta "A", "B" tai "C". Pesuaine A on laadukasta ja vastaa hyvin kuluttajien tarpeita. Niistä kuluttajista, jotka edellisellä kerralla ostivat A-paketin 90% ostaa seuraavallakin kerralla A-paketin ja 10% vaihtaa pesuainetta (5% ostaa B-paketin ja 5% ostaa C-paketin). B-pesuaine ei ole yhtä laadukasta kuin A-pesuaine. B-pesuainetta ostaneista 80% pysyy samassa ja 20% vaihtaa merkkiä (10% ostaa A:ta ja 10 % ostaa C:tä). C-pesuaine on heikkolaatuisinta. Sen käyttäjista vain 50% ostaa samaa pesuainetta seuraavallakin kerralla ja 50% vaihtaa ainetta (25% ostaa A:ta ja 25% ostaa B:tä).
Indeksoidaan tuotteet luonnollisella tavalla: A $\sim$ 1, B $\sim$ 2 ja C $\sim$ 3. Olkoon x_{jk} tuotteen j markkinaosuus "kierroksella" k. Silloin

$$x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} = 10000, \forall k$$

Markkinaosuuksista saadaan osuusvektori

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}$$

Osuusvektorin odotusarvo kierroksella $k+1$ saadaan arvioitujen siirtymä-todennäköisyyksien perusteella lausekkeesta

$$\vec{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{1;k+1} \\ x_{2;k+1} \\ x_{3;k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 & 0{,}25 \\ 0{,}05 & 0{,}80 & 0{,}25 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}50 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{P}} \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\vec{x}_k$$

Pesuaine A on juuri tullut myyntiin ja lähtötilanteen osuusjakauma on
$\vec{x}_0 = (0 \quad 7000 \quad 3000)^T$. Laske pesuaineen A markkinaosuus kierroksilla $1,\ldots,5$. (Jos et laske käsin vaan käytät laskemiseen exceliä, niin laske odotusarvot pidemmälle aikajaksolle, $k = 1,\ldots,100$.)

4. Mikä on tehtävässä 3 kuvattujen markkinoiden tasapainojakauma $\vec{x}^*$

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}, \text{ kun } k \to \infty$$

Ohje: Tasapainojakauma toteuttaa yhtälöt

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{P}\vec{x}^* & = & \vec{x}^* \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* & = & 10000 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 0{,}90x_1^* & + & 0{,}10x_2^* & + & 0{,}25x_3^* & = & x_1^* \\ 0{,}05x_1^* & + & 0{,}80x_2^* & + & 0{,}25x_3^* & = & x_2^* \\ 0{,}05x_1^* & + & 0{,}10x_2^* & + & 0{,}50x_3^* & = & x_3^* \\ x_1^* & + & x_2^* & + & x_3^* & = & 10000 \end{array} \right.$$

5. Olkoon A-pesuaineen valmistajan saama kate 0,40€/paketti. Oletamme nyt, että yksi kierros $\sim$ yksi kuukausi.
a) Mikä on ensimmäisen vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto (ei diskontata)

$$\sum_{k=1}^{12} 0{,}40 \cdot x_{1k}.$$

b) Mainosyhtiö tarjoaa kampanjaa, jonka avulla pesuaineen A markkinaosuus saataisiin viikon tehokampanjalla suoraan tasapainotilaan ilman transienttiä kasvujaksoa. Mikä on vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto mainoskampanjan jälkeen (ei diskontata)

$$12 \cdot 0{,}40 \cdot x_1^*.$$

Mitä kampanjasta enintään kannattaa maksaa?

6. Miten edellisen tehtävän tulokset muuttuvat, jos laskemme kertyneiden katetuottojen sijasta vuoden ajalta katetuottovirran nykyarvot ja kuukausijaksoon liittyvä laskentakorkokanta on $i = 0{,}01$.