

1. Määritä a) rivioperaatioiden avulla b) adjungaatin avulla käänteismatriisi matriisille

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} a) \quad & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \downarrow \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot 0,2 \cdot 0,2 \\ \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0,6 & -0,8 & 0 & -0,2 \\ 0 & 1 & 0,6 & -0,2 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow + \\ \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot (-0,5) \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1,4 & -0,3 & -0,2 \\ 0 & 1 & 0 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -0,5 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1,4 & -0,3 & -0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ -1 & -0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Tark. } A A^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1,4 & -0,3 & -0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ -1 & -0,5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^{-1} A &= \begin{pmatrix} -1,4 & -0,3 & -0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ -1 & -0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

determinanti

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= +(-1) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -(2 \cdot 3 - (-2) \cdot 4) + (2 \cdot 3 - (-2) \cdot (-1)) + 0$$

$$= -(6 + 8) + (6 - 2)$$

$$= \underline{-10}$$

Minori

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 14, \quad m_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4, \quad m_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 10$$

$$m_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad m_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad m_{23} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -5$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad m_{33} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{21} & m_{31} \\ -m_{12} & m_{22} & -m_{32} \\ m_{13} & -m_{23} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} (14) & -(-3) & (2) \\ -(4) & (-3) & -(2) \\ (10) & -(-5) & (0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1,4 & -0,3 & -0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ -1 & -0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Ratkaise Cramerin kaavoilla yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ = (4-9) - 3 \cdot (2-6) - (3-4) \\ = -5 + 12 + 1 \\ = 8$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = +5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 0 = -25$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 0 - 0 = 20$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = +5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0 + 0 = -5$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-25}{8} = -3,125$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{20}{8} = 2,500$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{-5}{8} = -0,625$$

tark. $-3,125 + 3 \cdot 2,5 - (-0,625) = 5$

$-3,125 + 2 \cdot 2,5 + 3(-0,625) = 0$

$2 \cdot (-3,125) + 3 \cdot 2,5 + 2 \cdot (-0,625) = 0$

✓

✓

✓ ok

3. Kaupungissa on 10 000 taloutta, jossa pyykki pestää käyttäen jotakin kolmesta pesuaineesta "A", "B" tai "C". Pesuaine A on laadukasta ja vastaa hyvin kuluttajien tarpeita. Niistä kuluttajista, jotka edellisellä kerralla ostivat A-paketin 90% ostaa seuraavallakin kerralla A-paketin ja 10% vaihtaa pesuainetta (5% ostaa B-paketin ja 5% ostaa C-paketin). B-pesuaine ei ole yhtä laadukasta kuin A-pesuaine. B-pesuainetta ostaneista 80% pysyy samassa ja 20% vaihtaa merkkiä (10% ostaa A:ta ja 10% ostaa C:tä). C-pesuaine on heikkolaatuisinta. Sen käyttäjistä vain 50% ostaa samaa pesuainetta seuraavallakin kerralla ja 50% vaihtaa ainetta (25% ostaa A:ta ja 25% ostaa B:tä).

Indeksoidaan tuotteet luonnollisella tavalla: $A \sim 1$, $B \sim 2$ ja $C \sim 3$. Olkoon x_{jk} tuotteen j markkinaosuus "kierroksella" k . Silloin

$$x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} = 10000, \forall k$$

Markkinaosuuksista saadaan osuusvektori

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}$$

Osuusvektorin odotusarvo kierroksella $k+1$ saadaan siirtymä-todennäköisyyksien perusteella lausekkeesta

$$\vec{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{1;k+1} \\ x_{2;k+1} \\ x_{3;k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix}}_{=P} \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} = P\vec{x}_k$$

Pesuaine A on juuri tullut myyntiin ja lähtötilanteen osuusjakauma on

$\vec{x}_0 = (0 \ 7000 \ 3000)^T$. Laske pesuaineen A markkinaosuus kierroksilla $1, \dots, 5$. (Jos et laske käsin vaan käytät laskemiseen exceliä, niin laske odotusarvot pidemmälle aikajakson, $k = 1, \dots, 100$.)

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1450 \\ 6350 \\ 2200 \end{pmatrix}$$

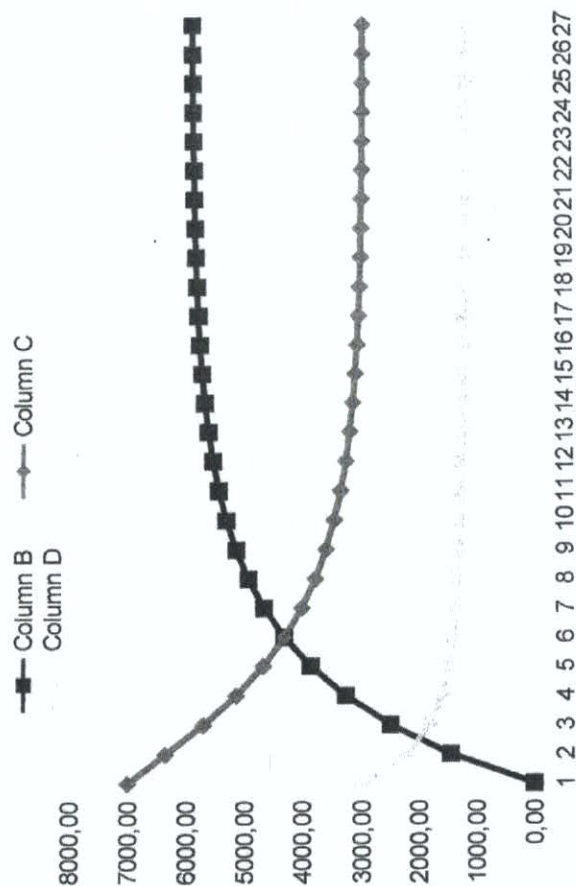
$$\vec{x}_2 = P\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1450 \\ 6350 \\ 2200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2490 \\ 5702,5 \\ 1807,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_3 = P\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2490 \\ 5702,5 \\ 1807,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3263,1 \\ 5138,4 \\ 1598,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_4 = P\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3263,1 \\ 5138,4 \\ 1598,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3850,3 \\ 4673,5 \\ 1476,2 \end{pmatrix}$$

P =	0,9	0,1	0,25
	0,05	0,8	0,25
	0,05	0,1	0,5

k	X _{1;k}	X _{2;k}	X _{3;k}
0	0,00	7000,00	3000,00
1	1450,00	6350,00	2200,00
2	2490,00	5702,50	1807,50
3	3263,13	5138,38	1598,50
4	3850,28	4673,48	1476,24
5	4301,66	4300,36	1397,98
6	4651,02	4004,87	1344,11
7	4922,43	3772,47	1305,09
8	5133,71	3590,37	1275,92
9	5298,36	3447,96	1253,68
10	5426,74	3336,71	1236,55
11	5526,87	3249,84	1223,28
12	5604,99	3182,04	1212,97
13	5665,94	3129,12	1204,94
14	5713,49	3087,83	1198,68
15	5750,60	3055,61	1193,80
16	5779,55	3030,47	1189,99
17	5802,13	3010,85	1187,02
18	5819,76	2995,54	1184,70
19	5833,51	2983,59	1182,89
20	5844,24	2974,27	1181,48
21	5852,62	2967,00	1180,38
22	5859,15	2961,33	1179,52
23	5864,25	2956,90	1178,85
24	5868,23	2953,45	1178,33
25	5871,33	2950,75	1177,92
26	5873,75	2948,65	1177,60



4. Mikä on tehtävässä 3 kuvattujen markkinoiden tasapainojakauma $\vec{x}^*$

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}, \text{ kun } k \rightarrow \infty$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* = 10000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,90x_1^* + 0,10x_2^* + 0,25x_3^* = x_1^* \\ 0,05x_1^* + 0,80x_2^* + 0,25x_3^* = x_2^* \\ 0,05x_1^* + 0,10x_2^* + 0,50x_3^* = x_3^* \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* = 10000 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -0,10 & 0,10 & 0,25 & 0 \\ 0,05 & -0,20 & 0,25 & 0 \\ 0,05 & 0,10 & -0,50 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10000 \end{array} \right) \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0,10 & 0,10 & 0,25 & 0 \\ 0,05 & -0,20 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10000 \end{array} \right) \begin{matrix} \cdot 20 \\ \cdot 20 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10000 \end{array} \right) \begin{matrix} \cdot \frac{1}{2} \quad \cdot \frac{1}{2} \quad \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2,5 & 0 \\ 0 & -3 & 7,5 & 0 \\ 0 & 2 & 3,5 & 10000 \end{array} \right) \begin{matrix} \cdot \frac{2}{3} \quad : (-3) \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2,5 & 0 \\ 0 & 1 & -2,5 & 0 \\ 0 & 0 & 8,5 & 10000 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1^* - x_2^* - 2,5x_3^* = 0 & (1) \\ x_2^* - 2,5x_3^* = 0 & (2) \\ 8,5x_3^* = 10000 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \rightarrow x_3^* = 10000/8,5 = 1176,47$$

$$(2) \rightarrow x_2^* - 2,5 \cdot 1176,47 = 0 \rightarrow x_2^* = 2941,18$$

$$(1) \rightarrow x_1^* - 2941,18 - 2,5 \cdot 1176,47 = 0$$

$$\rightarrow x_1^* = 5882,36$$

$$\therefore \bar{x}^* = \begin{pmatrix} 5880 \\ 2940 \\ 1180 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{tai} \\ \bar{x}^* = \begin{pmatrix} 5900 \\ 2900 \\ 1200 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

- 5) Olkoon A-pesuaineen valmistajan saama kate 0,40€/paketti. Oletamme nyt, että yksi kierros ~ yksi kuukausi. Kuukausijaksoon liittyvä laskentakorkokanta on $i = 0,01$.
- a) Mikä on ensimmäisen vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto (ei diskontata)

$$\sum_{k=1}^{12} 0,40 \cdot x_{1k}$$

- b) Mikä on vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto sen jälkeen, kun tasapaino on saavutettu (ei diskontata)

$$12 \cdot 0,40 \cdot x_1^*$$

a) Toteutuvan yhteydessä laskettiin Excelillä:

$$\sum_{k=1}^{12} x_{1k} = 51919,18 \rightarrow \sum_{k=1}^{12} 0,40 \cdot x_{1k} = 0,40 \cdot 51919,18 = 20767,7 \text{ €}$$

$$b) 12 \cdot 0,40 \cdot x_1^* = 12 \cdot 0,40 \cdot 5882,36 = 28235,32 \text{ €}$$

(ero on noin 7470 €)

Kannattaa maksaa ensinään 7470 €

6. Miten edellisen tehtävän tulokset muuttuvat, jos laskemme kertyneiden katetuottojen sijasta vuoden ajalta katetuottovirran nykyarvot ja kuukausijaksoon liittyvä laskentakorkokanta on $i = 0,01$.

P =	0,9 0,05 0,05			0,1 0,8 0,1			0,25 0,25 0,5		
	X _{1;k}			X _{2;k}			X _{3;k}		
k	X _{1;k}			X _{2;k}			X _{3;k}		
0	0,00	7000,00	3000,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	1450,00	6350,00	2200,00	574,26	574,26	574,26	574,26	574,26	574,26
2	2490,00	5702,50	1807,50	976,37	976,37	976,37	976,37	976,37	976,37
3	3263,13	5138,38	1598,50	1266,86	1266,86	1266,86	1266,86	1266,86	1266,86
4	3850,28	4673,48	1476,24	1480,02	1480,02	1480,02	1480,02	1480,02	1480,02
5	4301,66	4300,36	1397,98	1637,15	1637,15	1637,15	1637,15	1637,15	1637,15
6	4651,02	4004,87	1344,11	1752,59	1752,59	1752,59	1752,59	1752,59	1752,59
7	4922,43	3772,47	1305,09	1836,50	1836,50	1836,50	1836,50	1836,50	1836,50
8	5133,71	3590,37	1275,92	1896,36	1896,36	1896,36	1896,36	1896,36	1896,36
9	5298,36	3447,96	1253,68	1937,80	1937,80	1937,80	1937,80	1937,80	1937,80
10	5426,74	3336,71	1236,55	1965,10	1965,10	1965,10	1965,10	1965,10	1965,10
11	5526,87	3249,84	1223,28	1981,55	1981,55	1981,55	1981,55	1981,55	1981,55
12	5604,99	3182,04	1212,97	1989,66	1989,66	1989,66	1989,66	1989,66	1989,66
13	5665,94	3129,12	1204,94						
14	5713,49	3087,83	1198,68						
15	5750,60	3055,61	1193,80						
16	5779,55	3030,47	1189,99						
17	5802,13	3010,85	1187,02						
18	5819,76	2995,54	1184,70						
19	5833,51	2983,59	1182,89						
20	5844,24	2974,27	1181,48						
21	5852,62	2967,00	1180,38						
22	5859,15	2961,33	1179,52						
23	5864,25	2956,90	1178,85						
24	5868,23	2953,45	1178,33						
25	5871,33	2950,75	1177,92						
26	5873,75	2948,65	1177,60						

ERO

7177,73

Hetitasp.

0,01
26471,94

transientti

0,01
19294,21

Nna_1

→ kannattaa määrittää
erimäärä 7178 €