125 VUOTTA ETELÄ-POHJANMAAN OPISTO

kevät 2019 / orms.1030

Talousmatematiikan perusteet

10. harjoitus, viikko 8

1. Kaupungissa on 10 000 taloutta, jossa pyykki pestää käyttäen jotakin kolmesta pesuaineesta ”A”, ”B” tai ”C”.
Pesuaine A on laadukasta ja vastaa hyvin kuluttajien tarpeita. Niistä kuluttajista, jotka edellisellä kerralla ostivat A-paketin 90% ostaa seuraavallakin kerralla A-paketin ja 10% vaihtaa pesuainetta (5% ostaa B-paketin ja 5% ostaa C-paketin).
B-pesuaine ei ole yhtä laadukasta kuin A-pesuaine. B-pesuainetta ostaneista 80% pysyy samassa ja 20% vaihtaa merkkiä (10% ostaa A:ta ja 10% ostaa C:tä).
C-pesuaine on heikkolaatuisinta. Sen käyttäjista vain 50% ostaa samaa pesuainetta seuraavallakin kerralla ja 50% vaihtaa pesuainetta (25% ostaa A:ta ja 25% ostaa B:tä).
Indeksoidaan tuotteet luonnollisella tavalla: $A \sim 1$, $B \sim 2$ ja $C \sim 3$. Olkoon x_{jk} tuotteen j markkinaosuus ”kierroksella” k.
Silloin

$$x_{ik} + x_{2k} + x_{3k} = 10\,000, \text{ kaikilla } k.$$

Markkinaosuuksista saadaan osuusvektori

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}.$$

Osuusvektorin odotusarvo kierroksella $k+1$ saadaan siirtymä-todennäköisyyksien perusteella lausekkeesta

$$\vec{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{1;k+1} \\ x_{2;k+1} \\ x_{3;k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{P}} \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\vec{x}_k = \boldsymbol{P}^k\vec{x}_0$$

Pesuaine A on juuri tullut myyntiin ja lähtötilanteen osuusjakauma on $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 7000 & 3000 \end{pmatrix}^T$. Laske pesuaineen A markkinaosuus kierroksilla $1,\ldots,5$. (Jos et laske käsin vaan käytät laskemiseen exceliä, niin laske odotusarvot pidemmälle aikajaksolle, $k = 1,\ldots,100$.)

2. Ajan kuluessa edellisen tehtävän markkinaosuuksia kuvaava jakauma-vektori muuttuu ja lopulta lähestyy tasapainojakaumaa

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ kun } k \to \infty.$$

Ratkaise tasapainojakauma yhtälöistä

$$
\begin{cases} \boldsymbol{P}\vec{x} &= \vec{x} \\ x_1+x_2+x_3 &= 10000 \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ x_1+x_2+x_3 = 10000 \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -0,10 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & -0,20 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & -0,50 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10000 \end{pmatrix}
$$

3. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$
\begin{cases} -x + 2y = 2 \\ \quad -y = -3 \\ -2x + 4y = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{M}\vec{x} = \vec{b}
$$

Tarkista laskemalla, että yhtälöryhmän ratkaisu saadaan kaavalla

$$
\vec{x} = (\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{M}^T\vec{b}.
$$

(Voit käyttää laskemiseen Exeliä.)

4. Miten edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu, jos kolmannen yhtälön oikea puoli kasvaa yhdellä (arvosta 4 arvoon 5)?

5. Sovita malli

$$
c_0 + c_1 \cdot u_t + c_2 \cdot v_t = \hat{y}_t \approx y_t
$$

dataan

k	u_t	v_t	y_t
1	1.1	2.1	3.5
2	2.0	1.8	3.2
3	1.5	2.0	2.8
4	1.8	1.5	3.4
5	1.2	1.1	3.6

Ohje: Määritä paras mahdollinen ratkaisu (PNS-ratkaisu) yhtälöryhmälle

$$
\begin{cases}
c_0 \cdot 1 & + & c_1 \cdot 1.1 & + & c_2 \cdot 2.1 & = & 3.5 \\
c_0 \cdot 1 & + & c_1 \cdot 2.0 & + & c_2 \cdot 1.8 & = & 3.2 \\
c_0 \cdot 1 & + & c_1 \cdot 1.5 & + & c_2 \cdot 2.0 & = & 2.8 \\
c_0 \cdot 1 & + & c_1 \cdot 1.8 & + & c_2 \cdot 1.5 & = & 3.4 \\
c_0 \cdot 1 & + & c_1 \cdot 1.2 & + & c_2 \cdot 1.1 & = & 3.6
\end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1.1 & 2.1 \\ 1 & 2.0 & 1.8 \\ 1 & 1.5 & 2.0 \\ 1 & 1.8 & 1.5 \\ 1 & 1.2 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 3.2 \\ 2.8 \\ 3.4 \\ 3.6 \end{pmatrix}
$$

Kaavoja:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}ax^n = n\cdot ax^{n-1}, \qquad \int bx^m dx = \frac{b}{m+1}x^{m+1}, \text{ kun } m\neq -1$$

Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) = f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}(f(x_2)-f(x_1))$$

Korkolasku:

yksinkertainen korkolasku:	$K_t = (1+it)K_0 = (1+\frac{p}{100}t)K_0,$	kun $0<t<1$
koronkorkolasku:	$K_t = (1+i)^t K_0,$	kun $t = 1,2,3,\ldots$
jatkuva korkolasku:	$K_t = (1+i)^t K_0 = e^{\rho t}K_0,$	kun $t>1$ ja $(1+i)=e^{\rho}$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1+(k-1)d) = n\cdot\frac{(a_1+a_n)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n}a_1q^{k-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Nykyarvo:

Jaksotetulle vakiotulovirralle (H on perusinvestointi, JA on jäännösarvo ja k on tulovirta):

$$NNA = -H + a_{n,i}\cdot k + \frac{JA}{(1+i)^n}.$$

Matriisikaavoja ($n\times n$) neliömatriisille $\boldsymbol{A}$, jonka alkiot ovat a_{ij}.

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}m_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}m_{kj},$$

missä m_{ij} on alkioon a_{ij} liittyvä minori.

$$\mathrm{adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} & \cdots \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} & \cdots \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})$$

Cramerin kaavat: $x_j = D_j/D$

jos $\mathrm{Det}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\neq 0,$ niin $\boldsymbol{A}^{\dagger} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T$

Indeksikaavoja

Laspeyres $$P^L_{t_0;t} = \frac{\sum_i p_{t;i}q_{t_0;i}}{\sum_i p_{t_0;i}q_{t_0;i}}\cdot 100, \qquad Q^L_{t_0;t} = \frac{\sum_i q_{t;i}p_{t_0;i}}{\sum_i q_{t_0;i}p_{t_0;i}}\cdot 100$$

Paaschen $$P^P_{t_0;t} = \frac{\sum_i p_{t;i}q_{t;i}}{\sum_i p_{t_0;i}q_{t;i}}\cdot 100, \qquad Q^P_{t_0;t} = \frac{\sum_i q_{t;i}p_{t;i}}{\sum_i q_{t_0;i}p_{t;i}}\cdot 100$$

Fisher $$P^F_{t_0;t} = \sqrt{P^L_{t_0;t}\cdot P^P_{t_0;t}}, \qquad Q^P_{t_0;t} = \sqrt{Q^L_{t_0;t}\cdot Q^P_{t_0;t}}$$

Rajatuotto ja kysynnän hinta jousto

$$MR = p\cdot(1+\frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}})$$