

## Talousmatematiikan perusteet

### 10. harjoitus, viikko 8

1. Kaupungissa on 10000 taloutta, jossa pyykki pestää käyttäen jotakin kolmesta pesuaineesta "A", "B" tai "C".

Pesuaine A on laadukasta ja vastaa hyvin kuluttajien tarpeita. Niistä kuluttajista, jotka edellisellä kerralla ostivat A-paketin 90% ostaa seuraavallakin kerralla A-paketin ja 10% vaihtaa pesuainetta (5% ostaa B-paketin ja 5% ostaa C-paketin).

B-pesuaine ei ole yhtä laadukasta kuin A-pesuaine. B-pesuainetta ostaneista 80% pysyy samassa ja 20% vaihtaa merkkiä (10% ostaa A:ta ja 10% ostaa C:tä).

C-pesuaine on heikkolaatuisinta. Sen käyttäjistä vain 50% ostaa samaa pesuainetta seuraavallakin kerralla ja 50% vaihtaa pesuainetta (25% ostaa A:ta ja 25% ostaa B:tä).

Indeksoidaan tuotteet luonnollisella tavalla:  $A \sim 1$ ,  $B \sim 2$  ja  $C \sim 3$ . Olkoon  $x_{jk}$  tuotteen  $j$  markkinaosuus "kierroksella"  $k$ .

Silloin

$$x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} = 10000, \text{ kaikilla } k.$$

Markkinaosuuksista saadaan osuusvektori

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}.$$

Osuusvektorin odotusarvo kierroksella  $k + 1$  saadaan siirtymä-todennäköisyyksien perusteella lausekkeesta

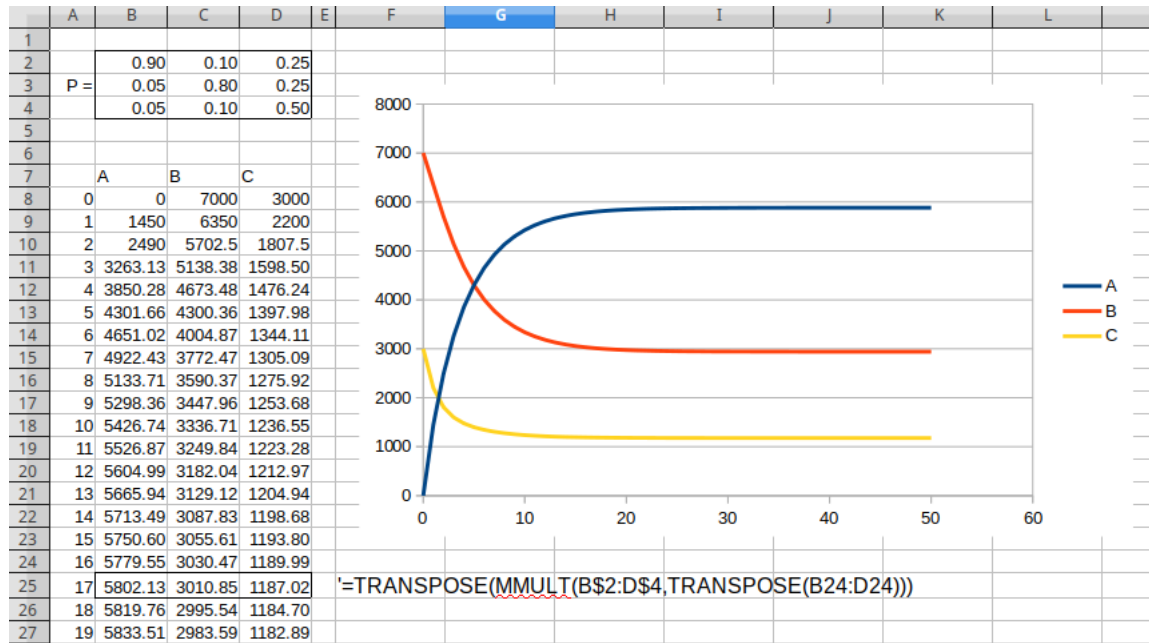
$$\vec{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{1;k+1} \\ x_{2;k+1} \\ x_{3;k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix}}_{=P} \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} = P\vec{x}_k = P^k\vec{x}_0$$

Pesuaine A on juuri tullut myyntiin ja lähtötilanteen osuusjakauma on  $\vec{x}_0 = (0 \ 7000 \ 3000)^T$ . Laske pesuaineen A markkinaosuus kierroksilla  $1, \dots, 5$ . (Jos et laske käsin vaan käytät laskemiseen exceliä, niin laske odotusarvot pidemmälle aikajaksolle,  $k = 1, \dots, 100$ .)

**Ratkaisu:** Viisi ensimmäistä osuusjakaumaa Excelillä

	0.90	0.10	0.25	0	1450.0
x1 = Px0 =	0.05	0.80	0.25	7000	= 6350.0
	0.05	0.10	0.50	3000	2200.0
	0.90	0.10	0.25	1450.0	2490.0
x2 = Px1 =	0.05	0.80	0.25	6350.0	= 5702.5
	0.05	0.10	0.50	2200.0	1807.5
	0.90	0.10	0.25	2490.0	3263.1
x3 = Px2 =	0.05	0.80	0.25	5702.5	= 5138.4
	0.05	0.10	0.50	1807.5	1598.5
	0.90	0.10	0.25	3263.1	3850.3
x4 = Px3 =	0.05	0.80	0.25	5138.4	= 4673.5
	0.05	0.10	0.50	1598.5	1476.2
	0.90	0.10	0.25	3850.3	4301.7
x5 = Px4 =	0.05	0.80	0.25	4673.5	= 4300.4
	0.05	0.10	0.50	1476.2	1398.0

Lasku voidaan myös organisoida Excelillä seuraavasti:



2. Ajan kuluessa edellisen tehtävän markkinaosuuksia kuvaava jakauma-vektori muuttuu ja lopulta lähestyy tasapainojakaamaa

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ kun } k \rightarrow \infty.$$

Ratkaise tasapainojakauma yhtälöistä

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{P}\vec{x} = \vec{x} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10000 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10000 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -0,10 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & -0,20 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & -0,50 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10000 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Ratkaisu:** Ratkaistaan yhtälöryhmä rivioperaatioilla seuraavasti

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|c} -0,10 & 0,10 & 0,25 & 0 \\ 0,05 & -0,20 & 0,25 & 0 \\ 0,05 & 0,10 & -0,50 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10000 \end{array} \right) \begin{array}{l} *(1) \\ \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\ \sim & \left( \begin{array}{ccc|c} -0,10 & 0,10 & 0,25 & 0 \\ 0,05 & -0,20 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10000 \end{array} \right) \begin{array}{l} *20 \\ *20 \\ \text{pois} \\ \end{array} \\ \sim & \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10000 \end{array} \right) \begin{array}{l} *(0,5) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} *(0,5) \\ \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} *(-0,5) \\ \\ \end{array} \\ \sim & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2,5 & 0 \\ 0 & -3 & 7,5 & 0 \\ 0 & 2 & 3,5 & 10000 \end{array} \right) \begin{array}{l} *(2/3) \\ \leftarrow + \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ :(-3) \\ \end{array} \\ \sim & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2,5 & 0 \\ 0 & 1 & -2,5 & 0 \\ 0 & 0 & 8,5 & 10000 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \end{aligned}$$

$$(3) \rightarrow x_3 = \frac{10000}{8,5} = 1176,5$$

$$(2) \rightarrow x_2 = 2,5 \cdot 1176,5 = 2941,2$$

$$(1) \rightarrow x_1 = 2941,2 + 2,5 \cdot 1176,5 = 5882,4$$

**Vastaus:** Tasapainossa  $x_1 = 5880$ ,  $x_2 = 2940$  ja  $x_3 = 1180$ .

3. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} -x + 2y = 2 \\ -y = -3 \\ -2x + 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} \Leftrightarrow \mathbf{M}\vec{x} = \vec{b}$$

Tarkista laskemalla, että yhtälöryhmän ratkaisu saadaan kaavalla

$$\vec{x} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \vec{b}.$$

(Voit käyttää laskemiseen Exeliä.)

*Ratkaisu:* Yhtälöryhmän kerroinmatriisi  $\mathbf{M}$  ei ole neliömatriisi, joten sillä ei ole käänteismatriisia. Jos matriisi  $\mathbf{M}$  on vapaa (eli  $\text{Det}(\mathbf{M}^T \mathbf{M}) \neq 0$ ), niin sillä on pseudoinverssi  $\mathbf{M}^\dagger = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T$ , jolla yhtälöryhmä voidaan ratkaista, jos yhtälöryhmällä on ratkaisu.

Tutkitaan ensin matriisin vapaus:

$$\begin{aligned} \text{Det}(\mathbf{M}^T \mathbf{M}) &= \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 21 \end{pmatrix} \right| \\ &= 5 \cdot 21 - (-10) \cdot (-10) = 5 \neq 0 \end{aligned}$$

Siis matriisilla on pseudoinverssi

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^\dagger &= (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 21 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -10 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on nyt:

$$\vec{x} = \mathbf{M}^\dagger \vec{b} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -10 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pseudoinverssin avulla saatu ratkaisu on niinsanottu PNS-ratkaisu (Pienimmän Neliösumman Ratkaisu), joka ei aina ole täsmällinen ratkaisu. Ratkaisu pitää siksi tarkistaa

$$\mathbf{M} \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{b} \quad \text{OK}$$

**Vastaus:**  $x = 4, y = 3$ .

**4.** Miten edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu, jos kolmannen yhtälön oikea puoli kasvaa yhdellä (arvosta 4 arvoon 5)?

*Ratkaisu:* Uudessa yhtälöryhmässä ensimmäinen ja kolmas yhtälö ovat ristiriidassa keskenään - ne eivät voi olla yhtä aikaa tosia.

$$\begin{cases} -x + 2y = 2 \\ -y = -3 \\ -2x + 4y = 5 \end{cases}$$

Yhtälöryhmä muuttui niin, että uudella yhtälöryhmällä ei ole enää ratkaisua.

Edellisessä tehtävässä laskettu PNS-ratkaisu muuttuu siten, että uuden yhtälöryhmän PNS-ratkaisu on

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\vec{x}_{uusi} &= \vec{b}_{uusi} \\ \Leftrightarrow \vec{x}_{uusi} &= \mathbf{M}^\dagger \vec{b}_{uusi} \\ &= \mathbf{M}^\dagger \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -10 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.6 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Vastaus:** Yhtälöryhmällä ei ole enää ratkaisua.

---

## 5. Sovita malli

$$c_0 + c_1 \cdot u_t + c_2 \cdot v_t = \hat{y}_t \approx y_t$$

dataan

$k$	$u_t$	$v_t$	$y_t$
1	1.1	2.1	3.5
2	2.0	1.8	3.2
3	1.5	2.0	2.8
4	1.8	1.5	3.4
5	1.2	1.1	3.6

Ohje: Määritä paras mahdollinen ratkaisu (PNS-ratkaisu) yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1.1 + c_2 \cdot 2.1 = 3.5 \\ c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 2.0 + c_2 \cdot 1.8 = 3.2 \\ c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1.5 + c_2 \cdot 2.0 = 2.8 \\ c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1.8 + c_2 \cdot 1.5 = 3.4 \\ c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1.2 + c_2 \cdot 1.1 = 3.6 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1.1 & 2.1 \\ 1 & 2.0 & 1.8 \\ 1 & 1.5 & 2.0 \\ 1 & 1.8 & 1.5 \\ 1 & 1.2 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 3.2 \\ 2.8 \\ 3.4 \\ 3.6 \end{pmatrix}$$

### Ratkaisu:

Merkitään seuraavassa kerroinmatriisia  $\mathbf{W}$ :llä.

Laskemme  $\mathbf{W}$ :n pseudoinverssin Excelin avulla

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1.1 & 2.0 & 1.5 & 1.8 & 1.2 \\ 2.1 & 1.8 & 2.0 & 1.5 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1.1 & 2.1 \\ 1 & 2.0 & 1.8 \\ 1 & 1.5 & 2.0 \\ 1 & 1.8 & 1.5 \\ 1 & 1.2 & 1.1 \end{pmatrix} \stackrel{excel}{=} \begin{pmatrix} 5.00 & 7.60 & 8.50 \\ 7.60 & 12.14 & 12.93 \\ 8.50 & 12.93 & 15.11 \end{pmatrix}$$

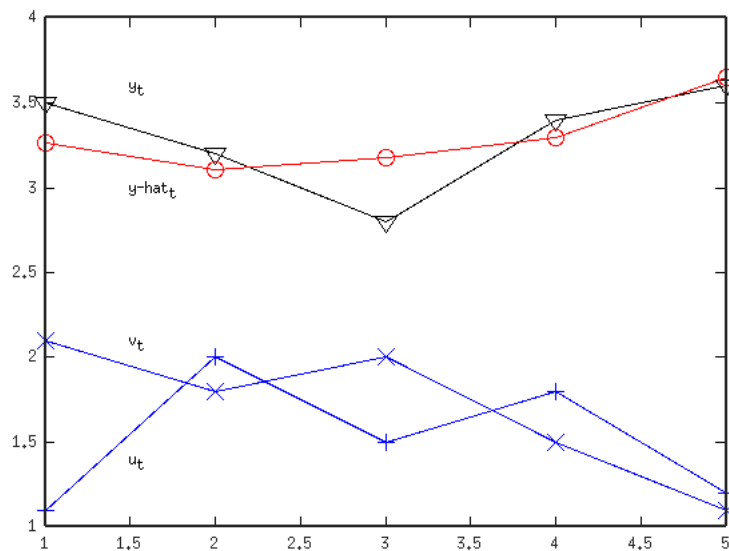
$$(\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \stackrel{excel}{=} \begin{pmatrix} 8.37697819475225 & -2.54188360224752 & -2.53724418784472 \\ -2.54188360224752 & 1.70111861436156 & -0.02577452446003 \\ -2.53724418784472 & -0.02577452446003 & 1.51554203824939 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}^\dagger = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T$$

$$\stackrel{excel}{=} \begin{pmatrix} 0.252693438 & -1.273828548 & -0.510335584 & -0.004278571 & 2.535749265 \\ -0.724779628 & 0.813959482 & -0.041754730 & 0.481468117 & -0.528893242 \\ 0.617042116 & 0.139182432 & 0.455178102 & -0.310325274 & -0.901077375 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \mathbf{W}^\dagger \vec{y} \stackrel{excel}{=} \begin{pmatrix} 4.49339 \\ -0.31600 \\ -0.41945 \end{pmatrix}$$

**Vastaus:** Malli:  $\hat{y}_t = 4.493 - 0.316 \cdot u_t - 0.419 \cdot v_t$



**Kommentti:** Malli ei oikein tunnu istuvan dataan!

## Kaavoja:

$$\frac{d}{dx} ax^n = n \cdot ax^{n-1}, \quad \int bx^m dx = \frac{b}{m+1} x^{m+1}, \text{ kun } m \neq -1$$

## Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (f(x_2) - f(x_1))$$

## Korkolasku:

yksinkertainen korkolasku:  $K_t = (1 + it)K_0 = (1 + \frac{p}{100}t)K_0$ , kun  $0 < t < 1$   
koronkorkolasku:  $K_t = (1 + i)^t K_0$ , kun  $t = 1, 2, 3, \dots$   
jatkuva korkolasku:  $K_t = (1 + i)^t K_0 = e^{pt} K_0$ , kun  $t > 1$  ja  $(1 + i) = e^p$

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

## Nykyarvo:

Jaksotetulle vakiotulovirralle ( $H$  on perusinvestointi,  $JA$  on jäännösarvo ja  $k$  on tulovirta):

$$NNA = -H + a_{n,i} \cdot k + \frac{JA}{(1+i)^n}$$

**Matriisikaavoja** ( $n \times n$ ) neliömatriisille  $\mathbf{A}$ , jonka alkiot ovat  $a_{ij}$ .

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} m_{ik} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} m_{kj},$$

missä  $m_{ij}$  on alkioon  $a_{ij}$  liittyvä minori.

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} & \cdots \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} & \cdots \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{adj}(\mathbf{A})$$

Cramerin kaavat:  $x_j = D_j / D$

jos  $\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \neq 0$ , niin  $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$

## Indeksikaavoja

Laspeyres  $P_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i P_{t;i} q_{t_0;i}}{\sum_i P_{t_0;i} q_{t_0;i}} \cdot 100, \quad Q_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i q_{t;i} P_{t_0;i}}{\sum_i q_{t_0;i} P_{t_0;i}} \cdot 100$

Paaschen  $P_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i P_{t;i} q_{t;i}}{\sum_i P_{t_0;i} q_{t;i}} \cdot 100, \quad Q_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i q_{t;i} P_{t;i}}{\sum_i q_{t_0;i} P_{t;i}} \cdot 100$

Fisher  $P_{t_0;t}^F = \sqrt{P_{t_0;t}^L \cdot P_{t_0;t}^P}, \quad Q_{t_0;t}^F = \sqrt{Q_{t_0;t}^L \cdot Q_{t_0;t}^P}$

## Rajatuotto ja kysynnän hintajousto

$$MR = p \cdot \left(1 + \frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}}\right)$$