

Talousmatematiikan perusteet

7. harjoitus, viikko 7

1. Oheisessa taulukossa on erään tuotteen hintaindeksejä. Laske hinnan keskimääräinen kasvuvauhti vuosina 2000-2005

vuosi	indeksi
1998	100
1999	104
2000	109
2001	112
2002	115
2003	118
2004	121
2005	124
2006	130

2. Yritys valmistaa muoviraaka-aineesta kahta tuotetta A ja B. Tuotteen A valmistaminen vie aikaa 15min ja raaka-ainetta 8kg. Tuotteen B valmistaminen vie aikaa 6min ja raaka-ainetta 5kg. Raaka-ainetta on olemassa 3000 kg/viikko ja laitteisto, jolla tuotteita valmistetaan on käytössä 40 tuntia viikossa. Yhden A-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 7 euroa ja yhden B-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 5 euroa. Mahdollisesti käyttämättä jäänyt muoviraaka-aine voidaan myydä hintaan 120 euroa/tonni. Määrittele päätösmuuttujat ja muodosta lp-malli myyntivoiton maksimoimiseksi. (Älä ratkaise mallia.)

3. Ratkaise graafisesti seuraava lp-malli

$$\begin{aligned} \max z = & x_1 + 2x_2 \\ \text{ehdoin} & 3x_1 + x_2 \leq 45 \\ & x_1 + x_2 \leq 18 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 60 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4. a) Piirrä seuraavan LP-mallin käypä alue ja b) ratkaise malli.

$$\begin{aligned} \min z = & x_1 - 5x_2 \\ \text{ehdoin} & 2x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ & x_1 + x_2 \geq 16 \\ & x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4. a) Pienyritys valmistaa kahta tuotetta 1 ja 2, ja myy kaiken valmistamansa. Kumpaakin tuotetta käsitellään neljällä osastolla seuraavan taulukon mukaisesti.

tuote	tuotantoaika (tuntia)			
	os. A	os. B	os. C	os D
1	4	2	6	1
2	4	3	1	2

Kullakin osastolla käytettävissä oleva työvoima on rajallinen siten, että työtunteja on osastoilla viikossa käytettävissä seuraavasti

osasto	työtunteja viikossa
A	120
B	220
C	300
D	80

Kate (myyntitulo - valmistuskustannukset) yhdeltä ”1”-tuotteelta on 300€ ja kate yhdeltä ”2”-tuotteelta 500€.

Muodosta LP-malli yrityksen kokonaiskatteen maksimoimiseksi. (Älä ratkaise mallia.)

b) Tehtävän yrityksen työaika-resurssi on 720 tuntia/viikossa eli 18 työntekijää.

Pohdi seuraavaa kysymystä: Jos yritykselle tarjoutuu mahdollisuus palkata kaksi uutta työntekijää, niin miten tämä uusi resurssi allokoidaan (sijoitetaan) eri osastoille?

5. Määritä käänteismatriisi matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Määritä rivioperaatioiden avulla käänteismatriisi matriisille

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x - z = 4 \\ 2x + 3y + 3z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(Vihje: Voit soveltaa periaatetta $\mathbf{N}\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = \mathbf{N}^{-1}\vec{b}$. Huomaa, että kerroinmatriisin käänteismatriisi laskettiin edellisessä tehtävässä!)

8. Miten edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu, jos kolmannen yhtälön oikea puoli kasvaa yhdellä (arvosta 8 arvoon 9)?

Kaavoja:

$$\text{Laspeyres} \quad P_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t_0;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t_0;i}} \cdot 100, \quad Q_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t_0;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t_0;i}} \cdot 100$$

$$\text{Paaschen} \quad P_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t_0;i}} \cdot 100, \quad Q_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t_0;i}} \cdot 100$$

$$\text{Fisher} \quad P_{t_0;t}^F = \sqrt{P_{t_0;t}^L \cdot P_{t_0;t}^P}, \quad Q_{t_0;t}^P = \sqrt{Q_{t_0;t}^L \cdot Q_{t_0;t}^P}$$

Yhtälöyhmän ratkaisu:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$$