kevät 2019 / orms.1030

Talousmatematiikan perusteet

7. harjoitus, viikko 7

1. Oheisessa taulukossa on erään tuotteen hintaindeksejä. Laske hinnan keskimääräinen kasvuvauhti vuosina 2000-2005

vuosi	indeksi
1998	100
1999	104
2000	109
2001	112
2002	115
2003	118
2004	121
2005	124
2006	130

Ratkaisu:
keskimääräinen kasvutekijä on

$$1 + r = \left(\frac{X_{2005}}{x_{2000}}\right)^{1/5} = \left(\frac{124}{109}\right)^{1/5} = 1,026122 \approx 1,0261$$

Vastaus: Keskimääräinen vuosikasvu on ollut $2,61\%$ vuosina 2000–2005.

---

2. Yritys valmistaa muoviraaka-aineesta kahta tuotetta A ja B. Tuotteen A valmistaminen vie aikaa 15min ja raaka-ainetta 8kg. Tuotteen B valmistaminen vie aikaa 6min ja raaka-ainetta 5kg. Raaka-ainetta on olemassa 3000 kg/viikko ja laitteisto, jolla tuotteita valmistetaan on käytössä 40 tuntia viikossa. Yhden A-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 7 euroa ja yhden B-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 5 euroa. Mahdollisesti käyttämättä jäänyt muoviraaka-aine voidaan myydä hintaan 120 euroa/tonni. Määrittele päätösmuuttujat ja muodosta lp-malli myyntivoiton maksimoimiseksi. (Älä ratkaise mallia.)

Ratkaisu:
Päätösmuuttujat:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{tuotteen A valmistus (kpl/viikko)} \\ x_2 &= \text{tuotteen B valmistus (kpl/viikko)} \\ x_3 &= \text{raaka-aineen myynti (kg/viikko)} \end{aligned}$$

Tavoitefunktio:

$$z = 7x_1 + 5x_2 + 0.120x_3$$

Rajoitteet:

$$\begin{array}{lccccccc}
\text{raaka-aine (kg):} & 8x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & \leq & 3000 \\
\text{aika (min):} & 15x_1 & + & 6x_2 & & & \leq & 40 \cdot 60
\end{array}$$

Vastaus: LP-malli

$$\begin{cases}
\begin{array}{lcccccccccc}
\text{max} & z & = & 7x_1 & + & 5x_2 & + & 0.120 \cdot x_3 & & \\
\text{s.t.} & & & 8x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & \leq & 3000 \\
& & & 15x_1 & + & 6x_2 & & & \leq & 2400
\end{array}
\end{cases}$$

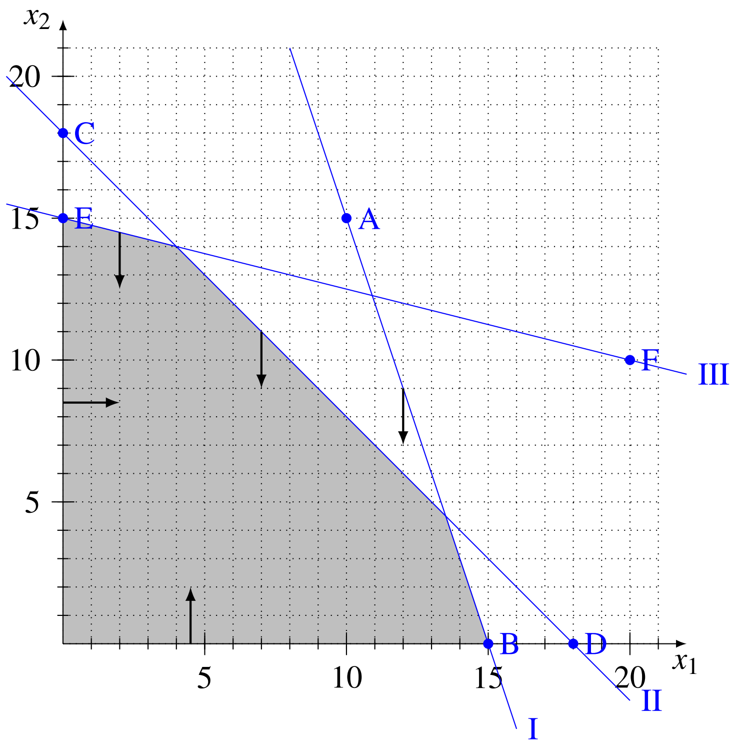
---

3. Ratkaise graafisesti seuraava lp-malli

$$\begin{array}{lccccc}
\text{max } z = & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{ehdoin} & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 45 \\
& x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\
& x_1 & + & 4x_2 & \leq & 60 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

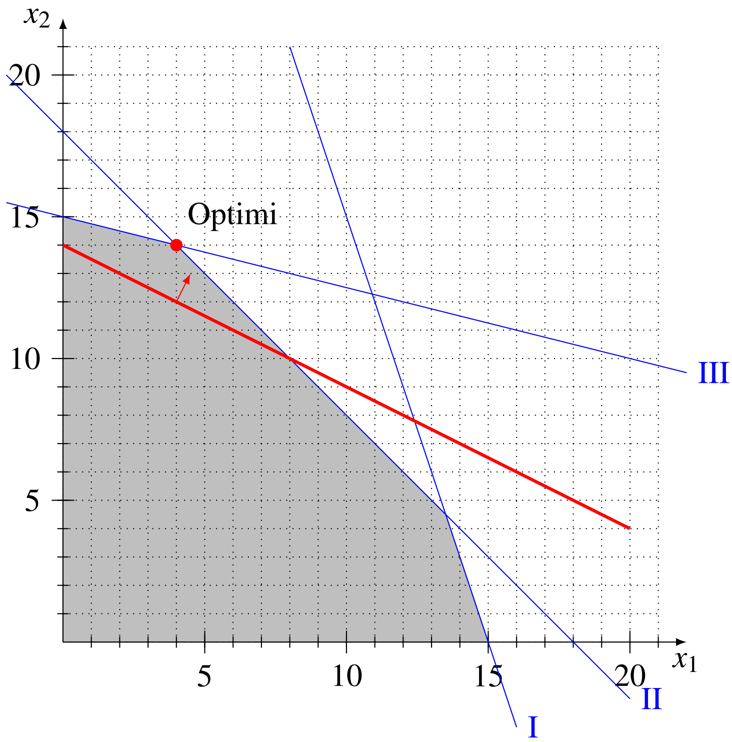
Ratkaisu: Käymme ensin läpi rajoitteet. Jokaisesta rajoitteesta kirjaamme rajoitteen, käyvän puolen ($\uparrow, \downarrow, \rightarrow, \leftarrow$), sekä kaksi rajoitesuoran pistettä.

$$\begin{array}{lrclcl}
\text{1. raj.} & 3x_1 + x_2 \leq 45 & \downarrow & A = (10, 15) & & B = (15, 0) \\
\text{2. raj.} & x_1 + x_2 \leq 18 & \downarrow & C = (0, 18) & & D = (18, 0) \\
\text{3. raj.} & x_1 + 4x_2 \leq 60 & \downarrow & E = (0, 15) & & F = (20, 10)
\end{array}$$



Tavoitesuora:

$$\text{tav.} \quad x_1 + 2x_2 = 28 \quad \uparrow \quad G = (0,14) \quad H = (20,4)$$



Optimi on pisteessä, jossa rajoitesuorat II ja III leikkaavat toisensa. Siis

$$\begin{cases} II \\ III \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 18 & *(-1) \\ x_1 + 4x_2 = 60 & \leftarrow + \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 18 \\ 3x_2 = 42 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 14 \end{cases} \quad \text{ja} \quad z = 4 + 2 \cdot 14 = 32$$

Vastaus: optimissa $x_1 = 4$, $x_2 = 14$ ja tavoitefunktio saa arvon $z = 32$.

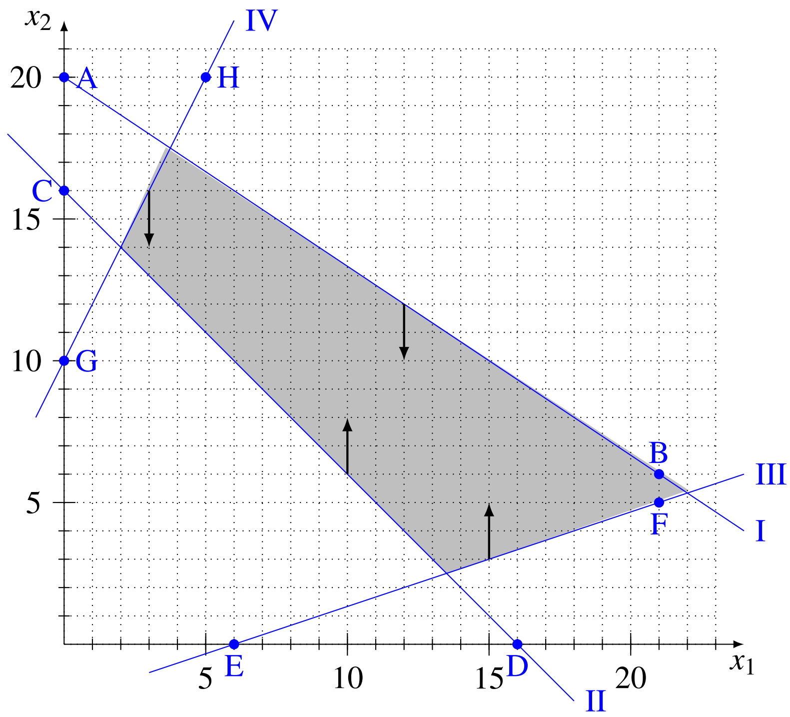
---

4. a) Piirrä seuraavan LP-mallin käypä alue ja b) ratkaise malli.

$$\begin{array}{lrcrcr} \min z = & x_1 & - & 5x_2 & & \\ \text{ehdoin} & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 60 \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 16 \\ & x_1 & - & 3x_2 & \leq & 6 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

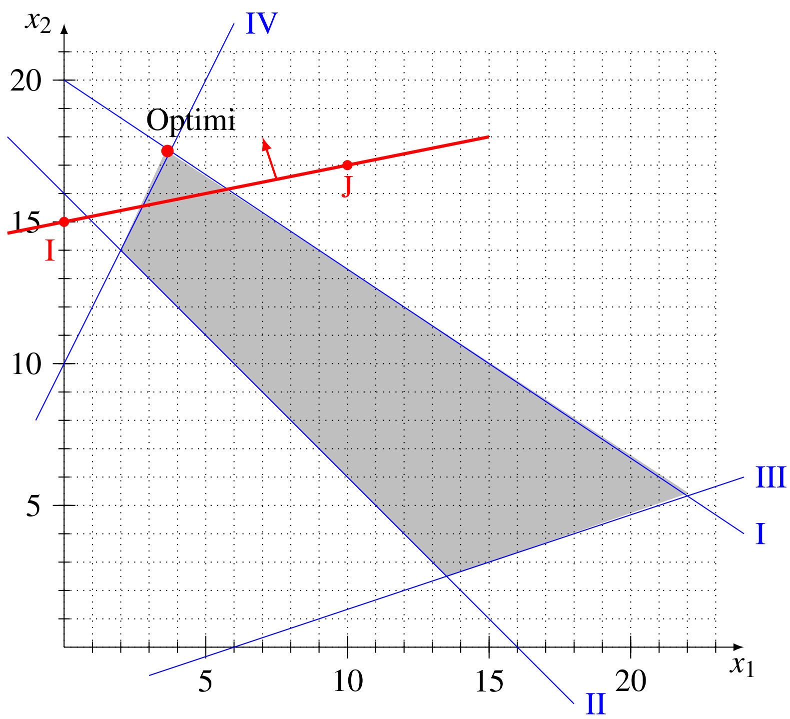
Ratkaisu:

1. raj.	$2x_1 + 3x_2 \leq 60$	$\downarrow$	$A = (0, 20)$	$B = (21, 6)$
2. raj.	$x_1 + x_2 \geq 16$	$\uparrow$	$C = (0, 16)$	$D = (16, 0)$
3. raj.	$x_1 - 3x_2 \leq 6$	$\uparrow$	$E = (6, 0)$	$F = (21, 5)$
4. raj.	$-2x_1 + x_2 \leq 10$	$\downarrow$	$G = (0, 10)$	$H = (5, 20)$



Tavoitesuora:

tav. $x_1 - 5x_2 = -75$ $\uparrow$ $I = (0, 15)$ $J = (10, 17)$



Optimissa rajoitteiden I ja IV rajoitesuorat leikkaavat. Siis

$$\begin{cases} I \\ IV \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \;\;2x_1 & + & 3x_2 & = & 60 & *(1) \\ -2x_1 & + & x_2 & = & 10 & \leftarrow + \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 60 \\ & & 4x_2 & = & 70 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 & = & 3.75 \\ x_2 & = & 17.50 \end{cases} \quad \text{ja} \quad z = 3.75 - 5 \cdot 17.50 = -83.75$$

Vastaus: optimissa $x_1 = 3.75$, $x_2 = 17.50$ ja tavoitefunktio saa arvon $z = -83.75$.

---

4. a) Pienyritys valmistaa kahta tuotetta 1 ja 2, ja myy kaiken valmistamansa. Kumpaakin tuotetta käsitellään neljällä osastolla seuraavan taulukon mukaisesti.

	tuotantoaika (tuntia)			
tuote	os. A	os. B	os. C	os D
1	4	2	6	1
2	4	3	1	2

Kullakin osastolla käytettävissä oleva työvoima on rajallinen siten, että työtunteja on osastoilla viikossa käytettävissä seuraavasti

osasto	työtunteja viikossa
A	120
B	220
C	300
D	80

Kate (myyntitulo - valmistuskustannukset) yhdeltä ”1”-tuotteelta on 300€ ja kate yhdeltä ”2”-tuotteelta 500€.
Muodosta LP-malli yrityksen kokonaiskatteen maksimoimiseksi. (Älä ratkaise mallia.)

b) Tehtävän yrityksen työaika-resurssi on 720 tuntia/viikossa eli 18 työntekijää.
Pohdi seuraavaa kysymystä: Jos yritykselle tarjoutuu mahdollisuus palkata kaksi uutta työntekijää, niin miten tämä uusi resurssi allokoidaan (sijoitetaan) eri osastoille?

Ratkaisu: a)
Päätösmuuttujat:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{tuotteen 1 valmistus (kpl/viikko)} \\ x_2 &= \text{tuotteen 2 valmistus (kpl/viikko)} \end{aligned}$$

Tavoitefunktio:

$$z = 300x_1 + 500x_2$$

Rajoitteet:

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{osasto A (h):} & 4x_1 & + & 4x_2 & \le & 120 \\ \text{osasto B (h):} & 2x_1 & + & 3x_2 & \le & 220 \\ \text{osasto C (h):} & 6x_1 & + & x_2 & \le & 300 \\ \text{osasto D (h):} & x_1 & + & 2x_2 & \le & 80 \end{array}$$

LP-malli

$$\begin{cases} \max & z = 300x_1 + 500x_2 \\ \text{s.t.} & 4x_1 + 4x_2 \le 120 \\ & 2x_1 + 3x_2 \le 220 \\ & 6x_1 + x_2 \le 300 \\ & x_1 + 2x_2 \le 80 \end{cases}$$

b) Kun on mahdollista palkata kaksi uutta työntekijää (80h työtä), niin haluamme selvittää mille osastoille uusi työresurssi kannattaa sijoittaa. Olkoon osastojen A, B, C, D uudet työresurssin lisäykset vastaavasti w_1, w_2, w_3, w_4. Silloin LP-malli menee muotoon

$$\begin{cases} \max & z = 300x_1 + 500x_2 \\ \text{s.t.} & 4x_1 + 4x_2 \le 120 + w_1 \\ & 2x_1 + 3x_2 \le 220 + w_2 \\ & 6x_1 + x_2 \le 300 + w_3 \\ & x_1 + 2x_2 \le 80 + w_4 \\ & w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 80 \end{cases}$$

tai systemaattisemmin

$$\begin{cases} \max & z = 300x_1 + 500x_2 \\ \text{s.t.} & 4x_1 + 4x_2 - w_1 \le 120 \\ & 2x_1 + 3x_2 - w_2 \le 220 \\ & 6x_1 + x_2 - w_3 \le 300 \\ & x_1 + 2x_2 - w_4 \le 80 \\ & w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 80 \end{cases}$$

---

5. Määritä käänteismatriisi matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu:
Tehdään ratkaisu rivioperaatioilla

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{vaihdetaan rivit}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{|c|} *(-2) \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \text{lisää rivi 1 } (-2)\text{:lla kerrottuna} \\ \text{riviin 2} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c|} \leftarrow + & \\ *(1) & *(-1) \end{array} \begin{array}{l} \text{lisää rivi 2 riviin 1} \\ \text{lopuksi vaihda rivin 1 merkit} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

siis $\mathbf{A}$:n käänteismatriisi on $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

---

6. Määritä rivioperaatioiden avulla käänteismatriisi matriisille

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} [1] & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c} \cdot(-1) & \cdot(-2) \\ + & \\ & + \end{array}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & [1] & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c} + & \\ \cdot(1) & \cdot(-5) \\ & + \end{array}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & [1] & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c|c} + & & \\ & + & \\ \cdot(1/2) & \cdot(-1/2) & \cdot(1/2) \end{array}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1.5 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & -2.5 & 3.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & -2.5 & 0.5 \end{array}\right)$$

Siis

$$\boldsymbol{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & -1.5 & 0.5 \\ -2.5 & 3.5 & -0.5 \\ 1.5 & -2.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

---

7. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x - z = 4 \\ 2x + 3y + 3z = 8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(Vihje: Voit soveltaa periaatetta $\boldsymbol{N}\vec{x} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \boldsymbol{N}^{-1}\vec{b}$. Huomaa, että kerroinmatriisin käänteismatriisi laskettiin edellisessä tehtävässä!)

Ratkaisu: Yhtälöryhmän kerroinmatriisin käänteismatriisi laskettiin edellisessä tehtävässä:

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & -1.5 & 0.5 \\ -2.5 & 3.5 & -0.5 \\ 1.5 & -2.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{N} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{N}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & -1.5 & 0.5 \\ -2.5 & 3.5 & -0.5 \\ 1.5 & -2.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tarkistetaan tulos sijoittamalla saadut muuttujien arvot alkuperäiseen yhtälöön

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -2 & - & 10 & - & 2\cdot(-6) & = & 0 & \text{Ok} \\ -2 & & & - & (-6) & = & 4 & \text{Ok} \\ 2\cdot(-2) & + & 3\cdot 10 & + & 3\cdot(-6) & = & 8 & \text{Ok} \end{array}\right.$$

Vastaus: $x=-2$, $y=10$, $z=-6$.

---

8. Miten edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu, jos kolmannen yhtälön oikea puoli kasvaa yhdellä (arvosta 8 arvoon 9)?

Ratkaisu: Vertaamme nyt kahta (eri) yhtälöryhmän ratkaisua keskenään.
$\vec{x}^{alkup}$ on yhtälöryhmän

$$\boldsymbol{N}\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\8\end{pmatrix}$$

ratkaisu ja $\vec{x}^{uusi}$ on yhtälöryhmän

$$\boldsymbol{N}\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\9\end{pmatrix}$$

ratkaisu. Muutos ratkaisussa on

$$\begin{aligned}\vec{x}^{uusi}-\vec{x}^{alkup} &= \boldsymbol{N}^{-1}\begin{pmatrix}0\\4\\9\end{pmatrix}-\boldsymbol{N}^{-1}\begin{pmatrix}0\\4\\8\end{pmatrix}=\boldsymbol{N}^{-1}\left\{\begin{pmatrix}0\\4\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\4\\8\end{pmatrix}\right\}\\ &= \begin{pmatrix}1.5 & -1.5 & 0.5\\ -2.5 & 3.5 & -0.5\\ 1.5 & -2.5 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\-0.5\\0.5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Uusi ratkaisu on siis

$$\vec{x}^{uusi}=\begin{pmatrix}-2\\10\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.5\\-0.5\\0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.5\\9.5\\-5.5\end{pmatrix}$$

Kaavoja:

Laspeyres $$P^L_{t_0;t}=\frac{\sum_i p_{t;i}q_{t_0;i}}{\sum_i p_{t_0;i}q_{t_0;i}}\cdot 100,\qquad Q^L_{t_0;t}=\frac{\sum_i q_{t;i}p_{t_0;i}}{\sum_i q_{t_0;i}p_{t_0;i}}\cdot 100$$

Paaschen $$P^P_{t_0;t}=\frac{\sum_i p_{t;i}q_{t;i}}{\sum_i p_{t_0;i}q_{t;i}}\cdot 100,\qquad Q^P_{t_0;t}=\frac{\sum_i q_{t;i}p_{t;i}}{\sum_i q_{t_0;i}p_{t;i}}\cdot 100$$

Fisher $$P^F_{t_0;t}=\sqrt{P^L_{t_0;t}\cdot P^P_{t_0;t}},\qquad Q^P_{t_0;t}=\sqrt{Q^L_{t_0;t}\cdot Q^P_{t_0;t}}$$

Yhtälöyhmän ratkaisu:

$$\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}\quad\Leftrightarrow\quad\vec{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\vec{b}$$