kevät 2019 / orms.1030

Talousmatematiikan perusteet

8. harjoitus, viikko 7

1. Alla on taulukossa esitettynä erään yrityksen tuotannon jakautuminen ja panosten käyttö tilikaudella. Laske tuotteiden omakustannusarvot.

		Os1	Os2	Os3	myynti (kpl)	yhteensä (kpl)	hinta (€/kpl)
	Os1	50	100	0	850	1000	p_1
	Os2	10	40	50	400	500	p_2
	Os3	20	0	30	200	250	p_3
raaka-aine 1	tt1	300	0	700		1000	1.00
raaka-aine 2	tt2	400	400	0		800	10.00
työvoima 1	tt3	70	100	150		320	20.00
työvoima 2	tt4	10	15	10		35	50.00

Ratkaisu:
Teknologia-matriisi $\boldsymbol{A}$ ja tuotannontekijöiden panos-tuotos -matriisi $\boldsymbol{B}$ ovat

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 50/1000 & 100/500 & 0/250 \\ 10/1000 & 40/500 & 50/250 \\ 20/1000 & 0/500 & 30/250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.050 & 0.200 & 0.000 \\ 0.010 & 0.080 & 0.200 \\ 0.020 & 0.000 & 0.120 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 300/1000 & 0/500 & 700/250 \\ 400/1000 & 400/500 & 0/250 \\ 70/1000 & 100/500 & 150/250 \\ 10/1000 & 15/500 & 10/250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.300 & 0.000 & 2.800 \\ 0.400 & 0.800 & 0.000 \\ 0.070 & 0.200 & 0.600 \\ 0.010 & 0.030 & 0.040 \end{pmatrix}$$

Tuotannontekijöiden hintavektori on

$$\vec{c}^T = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 20 & 50 \end{pmatrix}.$$

Omakustannusavo-vektori saadaan kaavalla (laskettu Excelillä)

$$\vec{p}^T = \vec{c}^T \boldsymbol{B}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 7.177 & 16.234 & 22.780 \end{pmatrix}.$$

---

2. Kasvata edellisen tehtävän yksikköhintoja siten, että jokaisesta tuotteesta saadaan 15% kate. Laske sitten jokaisen osaston kokonaistuotokset, sekä koko yrityksen myynnistä saama kokonaistuotto ja valmistuksen kokonaiskustannus, kun lopputuotteiden myynti muuttuu seuraavan taulukon mukaiseksi.

	myynti (kpl)
Os1	500
Os2	1000
Os3	400

Miten suuren katteen yritys kokonaisuudessaan saa ?

Ratkaisu:
Jos tuotteen omakustannusarvo on p_o, niin kasvatamme hinnan kertomalla vakiolla r myyntihinnaksi $p = r \cdot p_o$. Kate on silloin 15%, jos

$$\begin{aligned}
\frac{p - p_o}{p} &= 0.15 \\
\Leftrightarrow r \cdot p_o - p_o &= 0.15r \cdot p_o \\
\Leftrightarrow r - 1 &= 0.15r \\
\Leftrightarrow 0.85r &= 1 \\
\Leftrightarrow r &= \frac{1}{0.85} \approx 1.17647058823529
\end{aligned}$$

Kun tällä kertoimella kerrotaan omakustannusarvot, saadaan lopputuotteiden myyntihinnat

$$\vec{p}^T = r \cdot \vec{p}_o^T = \begin{pmatrix} 8.44 & 19.10 & 26.80 \end{pmatrix}.$$

Kokonaistuotokset ovat

$$\vec{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\vec{d} = \begin{pmatrix} 778.5 \\ 1198.1 \\ 472.2 \end{pmatrix}$$

Myynnistä saadaan tuotto

$$\vec{p}^T \vec{d} = \begin{pmatrix} 8.44 & 19.10 & 26.80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 1000 \\ 400 \end{pmatrix} = 34\,040$$

Valmistuksen kustannukset eli tuotannontekijöiden kustannukset ovat

$$\vec{c}^T \boldsymbol{B}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 20 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.300 & 0.000 & 2.800 \\ 0.400 & 0.800 & 0.000 \\ 0.070 & 0.200 & 0.600 \\ 0.010 & 0.030 & 0.040 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 778.5 \\ 1198.1 \\ 472.2 \end{pmatrix} = 28\,934$$

Kateprosentti on

$$\frac{34\,040 - 28\,934}{34\,040} \cdot 100\% = 15\%$$

---

3. Laske determinantit

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ratkaisu:
a)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1-(-1)\cdot(-3) = -1$$

b)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= +2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\cdot(1-0)-0+1\cdot(5-3) = 4\end{aligned}$$

---

4. Laske determinantti

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Ratkaisu: Kaavio on lähes kolmiomuodossa, joten teemme rivioperaation, jolla kaavio menee kolmiomuotoon. Sen jälkeen kaavion determinantti on diagonaalialkioiden tulo.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ *(-2) \\ \leftarrow + \\ \\ \\ \end{matrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 2 \\ &= 12\end{aligned}$$

---

5. Laske a) determinantti b) transpoosi ja c) käänteismatriisi matriisille $\boldsymbol{M}$.

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu:
a)

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(\boldsymbol{M}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= +1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1\cdot(3-0)-2\cdot(2-0)+0 \\ &= -1\end{aligned}$$

b)

$$\boldsymbol{M}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c} *(-2) \\ \leftarrow + \\ \end{array}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1) & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c} \leftarrow + & \\ *(2) & *(-1) \\ & \end{array}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (1) & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c} \leftarrow + & \\ & \leftarrow + \\ *(2) & *(-1) \end{array}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & (1) & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vastaus:

$$\mathrm{Det}(\boldsymbol{M}) = -1, \quad \boldsymbol{M}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

6. Laske a) determinantti b) transpoosi ja c) käänteismatriisi matriisille $\boldsymbol{M}$.

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu:

a)

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\boldsymbol{N}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= +0 - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 0 + 1 \cdot (1 - 3) \\ &= -2 \end{aligned}$$

b)

$$\boldsymbol{N}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{|l} \text{viedään tämä rivi alimmaksi} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{|l} *(-3) \\ \leftarrow + \\ \\ \end{array}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (-2) & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{|c|c} \leftarrow + & \\ *(0.5) & *(-0.5) \\ & \end{array}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & (1) & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{|c|c} \leftarrow + & \\ & \leftarrow + \\ *(-0.5) & *(0.5) \end{array}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vastaus:

$$\mathrm{Det}(\boldsymbol{N}) = -2, \quad \boldsymbol{N}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 2.5 & -0.5 \\ 0.5 & 1.5 & -0.5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

7. a) Millä vakion k arvolla matriisilla

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on käänteismatriisi.

b) Määritä käänteismatriisi $\mathbf{Q}^{-1}$

Ratkaisu: a) Matriisi $\boldsymbol{Q}$ on säännöllinen, eli sillä on käänteismatriisi, jos $\mathrm{Det}(\boldsymbol{Q}) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\boldsymbol{Q}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= +0 - 0 + k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 0 + k \cdot (1-3) \\ &= -2k \end{aligned}$$

Matriisilla on siis käänteismatriisi, jos

$$\begin{aligned} &-2k \neq 0 \\ &\Leftrightarrow k \neq 0 \end{aligned}$$

b)

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left|\begin{array}{l} \text{viedään tämä rivi alimmaksi} \\ \\ \\ \end{array}\right.
$$

$$
\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\left|\begin{array}{c} *(-3) \\ \leftarrow + \\ \\ \end{array}\right.
$$

$$
\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (-2) & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & k & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\left|\begin{array}{c} \leftarrow + \\ *(0.5) \\ \\ \end{array}\right|\begin{array}{c} \\ *(-0.5) \\ \\ \end{array}
$$

$$
\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & (k) & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\left|\begin{array}{c} \leftarrow + \\ \\ *(-1/(2k)) \end{array}\right|\begin{array}{c} \\ \leftarrow + \\ *(1/(2k)) \end{array}\left|\begin{array}{c} \\ \\ *(1/k) \end{array}\right.
$$

$$
\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/(2k) & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/(2k) & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/k & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Vastaus: $\boldsymbol{Q}$:lla on käänteismatriisi, jos $k \neq 0$, ja

$$
\boldsymbol{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/(2k) & -0.5 & 0.5 \\ 1/(2k) & 1.5 & -0.5 \\ 1/k & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Tarkistus:

$$
\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/(2k) & -0.5 & 0.5 \\ 1/(2k) & 1.5 & -0.5 \\ 1/k & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Kaavoja: