

Talousmatematiikan perusteet

9. harjoitus, viikko 8

1. Määritä adjungaatti matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Määritä käänteismatriisi edellisessä tehtävän matriisille.

(Ohje: Koska edellisessä tehtävässä laskimme matriisin Adjungaatin, saamme nyt käänteismatriisin helpoimmin kaavalla $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(\mathbf{A})} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A})$.)

3. Määritä adjungaatin avulla käänteismatriisi matriisille \mathbf{N} .

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Ratkaise Cramerin kaavoilla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 0 \\ 5x + 2y + 4z = 0 \\ -3x + y + z = 10 \end{cases}$$

5. Samuelsonin kerroin-kiihdytin -malli kuvaa kansantalouden syklistä dynamiikkaa. Jos malli on stabiili, se johtaa ilman häiriöitä tasapainotilaan, jota kuvaa alla oleva yhtälöryhmä. Ratkaise x yhtälöryhmästä Cramerin kaavalla.

$$\begin{cases} y = x + z \\ x = (1-s)(1-t)y \\ z = I_0 + ty \end{cases}$$

missä

x = kulutus tasapainotilassa ,

y = kansantulo tasapainotilassa ,

z = investoinnit tasapainotilassa ,

I_0 = pakolliset investoinnit (oletetaan vakioksi),

s = säästämisaste ($0 \leq s \leq 1$, oletetaan vakioksi),

t = veroaste ($0 \leq t \leq 1$, oletetaan vakioksi)

Kaavoja:

$$\frac{d}{dx}ax^n = n \cdot ax^{n-1}, \quad \int bx^m dx = \frac{b}{m+1}x^{m+1}, \text{ kun } m \neq -1$$

Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Varastomallit:

perusmalli $q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$

puutemalli $q_1 = q_0 \sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0 \sqrt{\frac{s}{h+s}}, \quad TC_1(q) = \frac{KD}{q} + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q}$

Korkolasku:

yksinkertainen korkolasku: $K_t = (1 + it)K_0 = (1 + \frac{p}{100}t)K_0, \quad \text{kun } 0 < t < 1$

koronkorkolasku: $K_t = (1 + i)^t K_0, \quad \text{kun } t = 1, 2, 3, \dots$

jatkuva korkolasku: $K_t = (1 + i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \quad \text{kun } t > 1 \text{ ja } (1 + i) = e^\rho$

Jaksolliset suoritukset

prolongointitekijä $s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$ diskonttaustekijä $a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n},$ kuoletuskerroin $c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

annuiteetti: $k = c_{n,i}K_0$ osamaksuerä: $k = c_{n,i}(H - h + m)$

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Nykyarvo:

Jaksotetulle vakiotulovirralle (H on perusinvestointi, JA on jäännösarvo ja k on tulovirta):

$$NNA = -H + a_{n,i} \cdot k + \frac{JA}{(1+i)^n}.$$

Matriisikaavoja ($n \times n$) neliömatriisille \mathbf{A} , jonka alkiot ovat a_{ij} .

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} m_{ik} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} m_{kj},$$

missä m_{ij} on alkioon a_{ij} liittyvä minori.

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} & \cdots \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} & \cdots \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{adj}(\mathbf{A})$$

Cramerin kaavat: $x_j = D_j/D$

Indeksikaavoja

$$\text{Laspeyres} \quad P_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t_0;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t_0;i}} \cdot 100, \quad Q_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t_0;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t_0;i}} \cdot 100$$

$$\text{Paaschen} \quad P_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t;i}} \cdot 100, \quad Q_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t;i}} \cdot 100$$

$$\text{Fisher} \quad P_{t_0;t}^F = \sqrt{P_{t_0;t}^L \cdot P_{t_0;t}^P}, \quad Q_{t_0;t}^P = \sqrt{Q_{t_0;t}^L \cdot Q_{t_0;t}^P}$$