kevät 2019 / orms.1030

Talousmatematiikan perusteet

9. harjoitus, viikko 8

1. Määritä adjungaatti matriisille

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu: Lasketaan minorit

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & m_{12} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & m_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \\
m_{21} &= \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, & m_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4, & m_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \\
m_{31} &= \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -7, & m_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9, & m_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Adj}(\boldsymbol{A}) &= \begin{pmatrix} (m_{11}) & -(m_{21}) & (m_{31}) \\ -(m_{12}) & (m_{22}) & -(m_{32}) \\ (m_{13}) & -(m_{23}) & (m_{33}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1) & -(-2) & (-7) \\ -(1) & (-4) & -(-9) \\ (-1) & -(2) & (5) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ -1 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

---

2. Määritä käänteismatriisi edellisessä tehtävän matriisille.
(Ohje: Koska edellisessä tehtävässä laskimme matriisin Adjungaatin, saamme nyt käänteimatriisin helpoimmin kaavalla $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(\boldsymbol{A})} \cdot \mathrm{Adj}(\boldsymbol{A})$.) **Ratkaisu:** Lasketaan ensin matriisin determinantti

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}(\boldsymbol{A}) &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1 + 2 - 5 = -2
\end{aligned}$$

Edellisestä tehtävästä saamme adjungaatin. Siis

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(\boldsymbol{A})} \cdot \mathrm{Adj}(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ -1 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.5 & -1 & 3.5 \\ 0.5 & 2 & -4.5 \\ 0.5 & 1 & -2.5 \end{pmatrix}$$

Tarkistus

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 & -1 & 3.5 \\ 0.5 & 2 & -4.5 \\ 0.5 & 1 & -2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{OK}$$

Vastaus:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & -1 & 3.5 \\ 0.5 & 2 & -4.5 \\ 0.5 & 1 & -2.5 \end{pmatrix}$$

---

3. Määritä adjungaatin avulla käänteismatriisi matriisille $\boldsymbol{N}$.

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu:
Determinantti:

$$\mathrm{Det}(\boldsymbol{N}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +0 - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Minorit:

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad m_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad m_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$m_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad m_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad m_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad m_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Käänteismatriisi:

$$\boldsymbol{N}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{N})} \mathrm{Adj}(\boldsymbol{N}) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} (1) & -(-1) & (-1) \\ -(1) & (-3) & -(-1) \\ (-2) & -(0) & (0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 & -0.5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

4. Ratkaise Cramerin kaavoilla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & - & 5z & = & 0 \\ 5x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \\ -3x & + & y & + & z & = & 10 \end{cases}$$

Ratkaisu: Laskemme ensin kerroinkaavion determinantin ja Cramerin kaavoissa tarvittavat apudeterminantit.

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= +2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (2-4) - 3 \cdot (5-(-12)) - 5 \cdot (5-(-6)) \\ &= -4 - 51 - 55 = -110 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & 3 & -5 \\ \mathbf{0} & 2 & 4 \\ \mathbf{10} & 1 & 1 \end{vmatrix} &= +\mathbf{0} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{0} & 4 \\ \mathbf{10} & 1 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{10} & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 \cdot (2-4) - 3 \cdot (0-40) - 5 \cdot (0-20) \\ &= 0 + 120 + 100 = 220 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{0} & -5 \\ 5 & \mathbf{0} & 4 \\ -3 & \mathbf{10} & 1 \end{vmatrix} &= +2 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{0} & 4 \\ \mathbf{10} & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{0} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 5 & \mathbf{0} \\ -3 & \mathbf{10} \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (0-40) - 0 \cdot (5-(-12)) - 5 \cdot (50-0) \\ &= -80 - 0 - 250 = -330 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & \mathbf{0} \\ 5 & 2 & \mathbf{0} \\ -3 & 1 & \mathbf{10} \end{vmatrix} &= +2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{10} \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & \mathbf{0} \\ -3 & \mathbf{10} \end{vmatrix} + \mathbf{0} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (20-0) - 3 \cdot (50-0) - 0 \cdot (5-(-6)) \\ &= 40 - 140 + 0 = -110 \end{aligned}$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{220}{-110} = -2, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-330}{-110} = 3, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{-110}{-110} = 1$$

Tarkistus:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-2) & + & 3 \cdot 3 & - & 5 \cdot 1 & = & 0 & \text{OK} \\ 5 \cdot (-2) & + & 2 \cdot 3 & + & 4 \cdot 1 & = & 0 & \text{OK} \\ -3 \cdot (-2) & + & 3 & + & 1 & = & 10 & \text{OK} \end{cases}$$

Vastaus: $x = -2$, $y = 3$ ja $z = 1$.

---

5. Samuelsonin kerroin-kiihdytin -malli kuvaa kansantalouden syklistä dynamiikkaa. Jos malli on stabiili, se johtaa ilman häiriöitä tasapainotilaan, jota kuvaa alla oleva yhtälöryhmä. Ratkaise x yhtälöryhmästä Cramerin kaavalla.

$$\begin{cases} y &= x+z \\ x &= (1-s)(1-t)y \\ z &= I_0+ty \end{cases},$$

missä

$$\begin{aligned} x &= \text{kulutus tasapainotilassa} , \\ y &= \text{kansantulo tasapainotilassa} , \\ z &= \text{investoinnit tasapainotilassa} , \\ I_0 &= \text{pakolliset investoinnit (oletetaan vakioksi)}, \\ s &= \text{säästämisaste } (0 \le s \le 1, \text{ oletetaan vakioksi}), \\ t &= \text{veroaste } (0 \le t \le 1, \text{ oletetaan vakioksi}) \end{aligned}$$

Ratkaisu: Muutetaan ensin yhtälöryhmä tavanomaiseen muotoon, jossa muuttujat x, y, z ovat vasemmalla ja kaikki termit, joissa ei ole näitä muuttujia ovat oikealla.

$$\begin{cases} y = x+z \\ x = (1-s)(1-t)y \\ z = I_0+ty \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - (1-s)(1-t)y = 0 \\ -ty + z = I_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -(1-s)(1-t) & 0 \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{-t} & \mathbf{1} \end{vmatrix} \\ &= +\mathbf{0} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -(1-s)(1-t) & 0 \end{vmatrix} - (\boldsymbol{-t}) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -(1-s)(1-t) \end{vmatrix} \\ &= 0 + t + ((1-s)(1-t) - 1) \\ &= t + 1 - t - s + st - 1 \\ &= -s(1-t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} \mathbf{0} & 1 & -1 \\ \mathbf{0} & -(1-s)(1-t) & 0 \\ \boldsymbol{I_0} & -t & 1 \end{vmatrix} \\ &= +\mathbf{0} - \mathbf{0} + \boldsymbol{I_0} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -(1-s)(1-t) & 0 \end{vmatrix} \\ &= -I_0(1-s)(1-t) \end{aligned}$$

Siis

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-I_0(1-s)(1-t)}{-s(1-t)} = \frac{I_0(1-s)}{s}$$

Kaavoja:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}ax^n = n \cdot ax^{n-1}, \qquad \int bx^m dx = \frac{b}{m+1}x^{m+1}, \text{ kun } m \neq -1$$

Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) = f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}(f(x_2)-f(x_1))$$

Varastomallit:

perusmalli $\quad q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$

puutemalli $\quad q_1 = q_0\sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0\sqrt{\frac{s}{h+s}}, \quad TC_1(q) = \frac{KD}{q} + \frac{M^2h}{2q} + \frac{(q-M)^2s}{2q}$

Korkolasku:

yksinkertainen korkolasku:	$K_t = (1+it)K_0 = (1+\frac{p}{100}t)K_0,$	kun $0 < t < 1$
koronkorkolasku:	$K_t = (1+i)^t K_0,$	kun $t = 1, 2, 3, \ldots$
jatkuva korkolasku:	$K_t = (1+i)^t K_0 = e^{\rho t}K_0,$	kun $t > 1$ ja $(1+i) = e^{\rho}$

Jaksolliset suoritukset

prolongointitekijä $\quad s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$

diskonttaustekijä $\quad a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n},$

kuoletuskerroin $\quad c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

annuiteetti: $k = c_{n,i}K_0$ $\qquad$ osamaksuerä: $k = c_{n,i}(H-h+m)$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1+(k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1+a_n)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Nykyarvo:

Jaksotetulle vakiotulovirralle (H on perusinvestointi, JA on jäännösarvo ja k on tulovirta):

$$NNA = -H + a_{n,i} \cdot k + \frac{JA}{(1+i)^n}.$$

Matriisikaavoja ($n \times n$) neliömatriisille $\boldsymbol{A}$, jonka alkiot ovat a_{ij}.

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}m_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}m_{kj},$$

missä m_{ij} on alkioon a_{ij} liittyvä minori.

$$\operatorname{adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} & \cdots \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} & \cdots \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$$

Cramerin kaavat: $x_j = D_j/D$

Indeksikaavoja

Laspeyres	$P^L_{t_0;t} = \dfrac{\sum_i p_{t;i} q_{t_0;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t_0;i}} \cdot 100,$	$Q^L_{t_0;t} = \dfrac{\sum_i q_{t;i} p_{t_0;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t_0;i}} \cdot 100$
Paaschen	$P^P_{t_0;t} = \dfrac{\sum_i p_{t;i} q_{t;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t;i}} \cdot 100,$	$Q^P_{t_0;t} = \dfrac{\sum_i q_{t;i} p_{t;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t;i}} \cdot 100$
Fisher	$P^F_{t_0;t} = \sqrt{P^L_{t_0;t} \cdot P^P_{t_0;t}},$	$Q^P_{t_0;t} = \sqrt{Q^L_{t_0;t} \cdot Q^P_{t_0;t}}$