

Talousmatematiikan perusteet

1. välikoe tiistaina 29.1.2019 MALLIRATKAISUT

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava). Kun teet tehtävän, niin käsittele kaikki sen alakohdat.

1. a) (2p) Mikä on kuukausijakson korkokanta, kun todellinen vuosikorko on 5,10%?
 b) (2p) Mikä on todellinen vuosikorko, jos kuukausijakson korkokanta on 0,0031289219?
 c) (2p) Laske tasaerälainan annuiteetti, kun laina-aika on 18 kuukautta, lainan määrä on 3 500€, laina hoidetaan kuukausittain ja lainaan liittyvä todellinen vuosikorko on 5,10%.

Ratkaisu:

a)

$$\begin{aligned}(1 + i_{kk})^{12} &= 1 + i_{tod} \\ \text{nyt: } (1 + i_{kk})^{12} &= 1.0510 \\ \Leftrightarrow (1 + i_{kk}) &= 1.0510^{1/12} = 1.004153777 \\ \rightarrow i_{kk} &= 0.004153777\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}1 + i_{tod} &= (1 + i_{kk})^{12} \\ \text{nyt: } 1 + i_{tod} &= 1.0031289219^{12} = 1.038199989 \\ \rightarrow i_{tod} &= 0.038199989\end{aligned}$$

c) Maksut suoritetaan kuukausijaksotettuina.

$$\begin{aligned}1 + i_{tod} &= 1.051 \\ \rightarrow 1 + i_{kk} &= 1.051^{1/12} \\ \rightarrow \begin{cases} (1 + i)^n &= 1.051^{18/12} \\ i &= 1.051^{1/12} - 1 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{tasaerä} = cK_0 &= \frac{i(1+i)^n}{((1+i)^n - 1)} \cdot K_0 \\ &= \frac{[1.051^{1/12} - 1]1.051^{18/12}}{(1.051^{18/12} - 1)} \cdot 3500\text{€} = 202.21\text{€}\end{aligned}$$

Vastaus:

- a) kuukausikorkokanta on 0.004153777
 b) todellinen vuosikorko on 3.82%
 c) tasaerä (kuukausierä) on 202.21€

2. Yritys valmistaa q tuotetta viikossa. Kysyntäfunktio on $p = 50 - 0,0025q$ ja vastaava rajakustannusfunktio on $MC(q) = 0,015q + 10$ ja kiinteät kustannukset ovat $FC = 20000$.

a) (2p) Millä tuotantomäärällä voitto on suurin?

b) (2p) Mikä on maksimivoitto?

c) (2p) Olkoon yrityksen tuotantomäärä on a-kohdan mukainen. Kun kiinteä kustannus kasvaa 15%, niin miten paljon muuttuu voitto, ja miten monta prosenttiyksikköä muuttuu katetuotto-prosentti? (Katetuotto-prosentti = $(\text{voitto/tuotto}) \cdot 100\%$.)

Kirjoita vastaus niin, että siitä käy ilmi muutoksen suunta.

Ratkaisu:

a) Selvitetään ensin rajatuotto:

$$\begin{array}{ll} \text{hinta} & p = 50 - 0.0025q \\ \text{tuotto} & R = pq = 50q - 0.0025q^2 \\ \text{rajuotto} & MR = R'(q) = 50 - 0.005q \end{array}$$

Voitto maksimoituu, kun ”rajakustannus = rajatuotto”

$$\begin{aligned} MC &= MR \\ 0.015q + 10 &= 50 - 0.005q \\ 0.02q &= 40 \\ q &= 2000 \end{aligned}$$

b) Voiton laskemiseksi tarvitsemme kustannusfunktion.

$$\begin{cases} MC = 0.015q + 10 \\ FC = 20000 \end{cases} \rightarrow C(q) = 0.0075q^2 + 10q + 20000$$

(Tarkistus: $MC = \frac{d}{dq}(0.0075q^2 + 10q + 20000) = 0.015q + 10$. OK)

Seuraavaksi laskemme maksimivoiton, eli voiton, kun valmistusmäärä on 2000kpl/vko.

Voitto = Tuotto – Kustannukset

$$\begin{aligned} &= R(2000) - C(2000) = (50 \cdot 2000 - 0.0025 \cdot 2000^2) - (0.0075 \cdot 2000^2 + 10 \cdot 2000 + 20000) \\ &= (100000 - 10000) - 30000 - 20000 - 20000 = 20000 \end{aligned}$$

c) Kun kiinteä kustannus kasvaa $\frac{15}{100} \cdot 20000\text{€} = 3000\text{€/vko}$. Silloin voitto pienenee 3000€/vko . Katetuotto-prosentti ennen ja jälkeen kiinteän kustannuksen muutosta ovat:

$$\begin{array}{ll} \text{jälkeen} & \frac{17000}{90000} \cdot 100\% = 18.88\% \\ \text{ennen} & \frac{20000}{90000} \cdot 100\% = 22.22\% \\ \hline \text{muutos} & 18.88\% - 22.22\% = -3.34 \text{ prosenttiyksikköä} \end{array}$$

Vastaus: a) Optimaalista on tuottaa 2000 tuotetta viikossa,

b) voitto on silloin 20000€/vko c) Jos kiinteä kustannus kasvaa 15%:lla, niin voitto pienenee 3000€/vko ja katetuotto-prosentti pienenee 3.34 prosenttiyksikköä.

3. a) (3p) Määrittele lyhyesti sanallisesti y :n jousto x :n suhteen.

b) (3p) Tuotteen hinta on nyt 15.00€ ja kysyntä 4 500 tuotetta kuukaudessa. Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen hintaa lasketaan 0.25 eurolla, ja tuotteen kysynnän hintajousto on -2,2?

Ratkaisu:

a) y :n jousto x :n suhteen on y :n %-muutos jaettuna x :n %-muutoksella.

b) (lasku-tapa I)

$p = 15.00\text{€}/\text{kpl}$	hinta nyt
$q = 4500\text{kpl}/\text{kk}$	kysyntä nyt
$\Delta p = -0,25\text{€}/\text{kpl}$	hinnan muutos
$\Delta q = x \text{ kpl}/\text{kk}$	kysynnän muutos
$khj = -2.2$	kysynnän hintajousto

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = khj$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta q}{-0,25\text{€}/\text{kpl}} \cdot \frac{15.00\text{€}/\text{kpl}}{4500\text{kpl}/\text{kk}} = \frac{-2.2}{1}$$
$$\Leftrightarrow \Delta q \cdot = \frac{-2.2 \cdot (-0,25\text{€}/\text{kpl}) \cdot 4500\text{kpl}/\text{kk}}{15.00\text{€}/\text{kpl}} = +165\text{kpl}/\text{kk}$$

(lasku-tapa II)

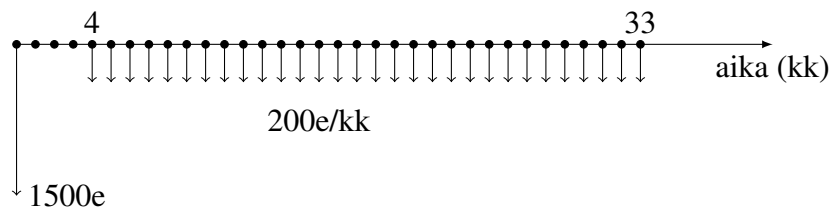
$p = 15.00\text{€}/\text{kpl}$	muutos: $\frac{-0.25\text{€}}{15.00\text{€}} \cdot 100\% = -1.6667\%$
$q = 4500\text{kpl}/\text{kk}$	muutos: $x\%$
$khj = -2.2$	

$$\frac{x\%}{-1.6667\%} = -2.2$$
$$\Leftrightarrow x\% = -2.2 \cdot (-1.6667\%) = +3.6667\%$$

Vastaus: a) ks. edellä, b) kysyntä kasvaa 165kpl/kk (3.67%)

4. Yritys solmii sopimuksen, jonka mukaan yritys maksaa sopimuksen allekirjoituspäivänä 1500€. Lisäksi kuukausittain maksetaan 200€niin, että kuukausimaksut alkavat 3 kuukautta allekirjoittamisen jälkeen (eli ensimmäinen 200€maksu maksetaan 4 kuukautta sopimuksen solmimisesta) ja kuukausieriä maksetaan 30 (2,5 vuotta). Laske maksuvirran nykyarvo, kun laskentakorko (todellinen vuosikorko) on 3.15%.

Ratkaisu:



$$\begin{aligned}
 \text{Nykyarvo} &= 1500\text{€} + \sum_{k=4}^{33} \frac{200\text{€}}{(1.0315^{1/12})^k} \\
 &= 1500\text{€} + \frac{200\text{€}}{1.0315^{4/12}} \left(\frac{1 - (1.0315^{-1/12})^{30}}{1 - 1.0315^{-1/12}} \right) = 1500\text{€} + 5721.30\text{€} \\
 &= 7221.30\text{€}
 \end{aligned}$$

Vastaus: Maksuvirran nykyarvo on 7 221.30€.

(Tarkistus: Kirjanpidollinen maksukertymä on $1500\text{€} + 30 \cdot 200\text{€} = 7500\text{€}$ Nykyarvo on nyt hieman vähemmän kuin kirjanpidollinen kertymä, kuten sen pitää ollakin. OK)

5. Yritys varastoi raaka-ainetta välivarastoon. Raaka-aineen kysyntä on 6000 kg/vuosi. Tilaukustannus on 20 euroa/tilaus ja varaston yksikköylläpitokustannus on 80 senttiä/kg/kuukausi.

a) Mikä on optimaalinen tilauserän koko?

b) Raaka-aineen hankintahinnasta saadaan alennusta 0.05€/kg, jos tilauserä on vähintään 400kg. Mikä on nyt optimaalinen tilauserän koko?

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{Kysyntä} & D = 6000\text{kg/vuosi} \\ \text{Tilaukust.} & K = 20\text{€} \\ \text{Yksikkö-ylläp.kust.} & h = 0.80 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{kk}} = 9.60 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{vuosi}} \end{aligned}$$

a) Optimitilauserä on

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20\text{€} \cdot 6000 \frac{\text{kg}}{\text{vuosi}}}{9.60 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{vuosi}}} = 158\text{kg}$$

b) Yritykselle tarjotaan määrä-alennusta. Raaka-aineen yksikköhintaa ei ole ilmoitettu, mutta alennus on 0.05€/kg, jos tilauserä on vähintään 400kg.

Kannattaa harkita vain vaihtoehtoja $q_0 = 158\text{kg}$ ja $q_1 = 400\text{kg}$. Kummassakin tapauksessa laskemme varastojärjestelmän kokonaiskustannuksen ja alennuksen. Sitten vertaamme vaihtoehtoja.

Tapaus $q_0 = 158\text{kg}$ (alennushyöty 0€/vuosi):

$$\begin{aligned} TC(158) &= \frac{KD}{q_0} + h \cdot \frac{q_0}{2} = \frac{20\text{€} \cdot 6000\text{kg/vuosi}}{158\text{kg}} + 9.60 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{158\text{kg}}{2} \\ &= 759.49 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 758.40 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 1517.89 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \end{aligned}$$

Tapaus $q_1 = 400\text{kg}$ (alennushyöty $0.05 \frac{\text{€}}{\text{kg}} \cdot 6000 \frac{\text{kg}}{\text{vuosi}} = 300.00\text{€/vuosi}$):

$$\begin{aligned} TC(400) &= \frac{KD}{q_1} + h \cdot \frac{q_1}{2} = \frac{20\text{€} \cdot 6000\text{kg/vuosi}}{400\text{kg}} + 9.60 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{400\text{kg}}{2} \\ &= 300.00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 1920.00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 2220.00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \end{aligned}$$

Jops yritys tilaa 400kg erissä, niin varaston-pito -kustannus kasvaa enemmän kuin alennushyöty laskee ostokustannuksia. Tarjotun alennuksen takia ei siis kannata kasvattaa tilauserää.

Vastaus: a) Optimaalinen tilauserä on 158kg,

b) Tarjotusta määräalennuksesta huolimatta Optimaalinen tilauserä on edelleen 158kg.

$$\frac{d}{dx}ax^n = n \cdot ax^{n-1}, \quad ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Varastomallit:

$$\text{perusmalli} \quad q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Korkolasku:

yksinkertainen korkolasku:

$$K_t = (1 + it)K_0 = \left(1 + \frac{p}{100}t\right)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

koronkorkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0, \text{ kun } t = 1, 2, 3, \dots$$

jatkuva korkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0 = e^{pt} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1 + i) = e^p$$

Jaksolliset suoritukset

$$\text{prolongointitekijä } s_{n,i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$\text{diskonttaustekijä } a_{n,i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n}$$

$$\text{kuoletuskerroin } c_{n,i} = \frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}$$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\text{annuiteetti: } k = c_{n,i}K_0 \quad \text{osamaksuerä: } k = c_{n,i}(H - h + m)$$

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Rajatuotto ja kysynnän hintajousto

$$MR = p \cdot \left(1 + \frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}}\right)$$

Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} (f(x_1) - f(x_0))$$