

2 Kertausta lisäyksiin

2.1 Joukko-oppia ja logiikkaa

Joukko muodostuu alkioista. Joukkoa merkitään isolla kirjaimella ja joukon alkioita pienellä kirjaimella. Jos a on joukon A alkio, merkitsemme $a \in A$. Vastaavasti, jos a ei ole joukon A alkio, niin merkitsemme $a \notin A$. Luontevin tapa määritellä joukko, on luetella sen alkioita. Tämä tehdään ns. joukkosulkeiden avulla. Voimme esimerkiksi määritellä joukot.

$$\begin{aligned}F &= \{a, b, c\} \\G &= \{1, 2, \dots, 100\}\end{aligned}$$

Joskus alkioiden luetteleminen on työlästä tai mahdotonta. Silloin joukkosulkeilla ilmaistaan perusjoukko, jonka alkioista on kyse ja ehto, jonka määriteltävän joukon alkioita toteuttavat. Voimme esimerkiksi määritellä joukot.

$$\begin{aligned}A &= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\} \\B &= \{x \in \mathbb{Q} \mid -1 < x < 1\} \\C &= \{\text{Turku}\} \\D &= \{k \mid k \text{ on Suomen kaupunki}\} \\E &= \{z \in D \mid z \text{ on entinen pääkaupunki}\}\end{aligned}$$

Seuraavia merkintätapoja käytetään jatkossa melko harvoin. Silti niitä tarvittaessa käytetään ja varsinkin kirjallisuudessa merkinnät voivat tulla esiin. Kun myöhemmin puhumme epäyhtälöiden ratkaisujoukoista ja niiden leikkauksista, kannattaa uudelleen lukea seuraavat määritelmät.

Jos perusjoukko on asiayhteydestä selvä, sitä ei merkitä. Joukot A ja B ovat *amat* eli *identtiset*, jos niissä on täsmälleen samat alkioita. Merkitään tällöin $A = B$. Päinvastaisessa

tapauksessa on olemassa alkio, joka kuuluu toiseen joukkoon mutta ei toiseen ja merkitsemme $A \neq B$.

Joukkoa A sanotaan joukon B *osajoukoksi*, jos jokainen A :n alkio on myös B :n alkio. Merkitsemme silloin $A \subseteq B$. Jos A on B :n osajoukko, mutta joukot eivät ole identtiset, sanomme, että A on B :n *aito osajoukko*. Merkitsemme silloin $A \subset B$. Edellä määritellyille joukoille voimme siis merkitä, että

$$A \neq B, \quad B \subset A, \quad E \subset D, \quad C = E$$

Tyhjä joukko, $\emptyset = \{ \}$, on joukko, jossa ei ole yhtään alkioita. Jokainen joukko sisältää tyhjän joukon osajoukkonaan.

Koulukurssista tuttuja joukkoja (lukualueita) ovat

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} = \text{luonnollisten lukujen joukko,} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \text{kokonaislukujen joukko,} \\ \mathbb{Q} &= \left\{ \frac{m}{n} \mid n \neq 0, m, n \in \mathbb{Z} \right\} = \text{rationaalilukujen joukko,} \\ \mathbb{R} &= \text{reaalilukujen joukko.} \end{aligned}$$

Seuraavaksi määrittelemme eräitä joukkooperaatioita joukkosulkeiden avulla. Määritelmän ohessa on ns. Venn-diagrammi, joka havainnollistaa operaatiota. Viivoitettu alue vastaa määriteltävää joukkoa. Venn-diagrammit ovat erittäin hyödyllisiä, kun todennäköisyyslaskennassa jaetaan kaikki alkeistapaukset suotuisiin ja ei-suotuisiin. Perusjoukkoa merkitään seuraavassa E :llä.

Yhdiste: Joukkojen A ja B *yhdiste* (union), $A \cup B$ on joukko, joka voidaan kuvailla seuraavilla tavoilla:

- Yhdisteen alkioita ovat kaikki A :n alkiot ja kaikki B :n alkiot.
- Alkio $x \in E$ on yhdisteen alkio, jos ja vain jos x on A :n alkio tai x on B :n alkio.
- $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}$

Edellinen luonnehdinta on arkikielelle tyypillinen, ja toinen taas arkikielelle vieras. Edellinen lause kuvailee joukkoa, kun taas toinen lause kuvaa joukon alkioita.

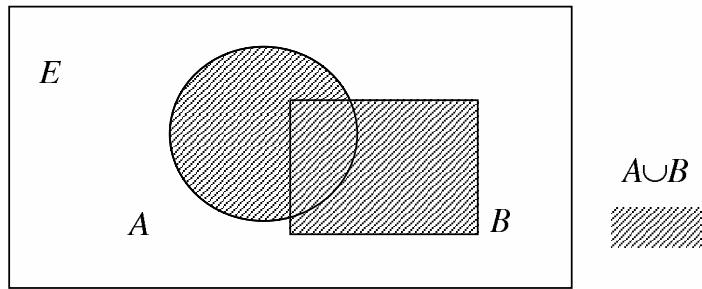


Figure 2.1: Yhdiste $A \cup B$

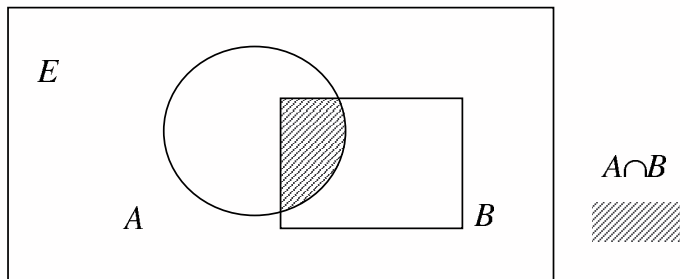


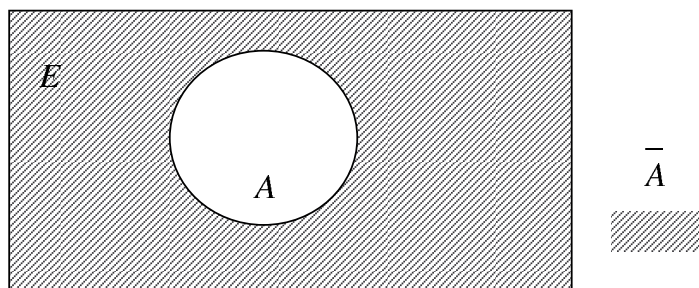
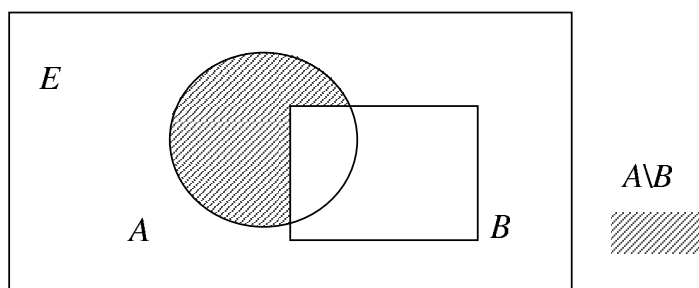
Figure 2.2: Leikkaus $A \cap B$

Leikkaus: Joukkojen A ja B *leikkaus* (intersection), $A \cap B$ on joukko, joka voidaan kuvailla seuraavilla tavoilla:

- Leikkaukseen kuuluvat A :n ja B :n yhteiset alkio.
- Alkio $x \in E$ on leikkauksen alkio, jos ja vain jos x on A :n alkio ja x on B :n alkio.
- $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}$

Komplementti: Joukon A *komplementti*, \bar{A} on joukko, joka voidaan kuvailla seuraavilla tavoilla:

- A :n komplementtiin kuuluvat kaikki ne perusjoukon alkio, jotka eivät ole A :n alkioita..
- Alkio $x \in E$ on leikkauksen alkio, jos ja vain jos $x \notin A$.
- $\bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$

Figure 2.3: Leikkaus $A \cap B$ Figure 2.4: Erotus $A \setminus B$

Erotus: Joukkojen A ja B erotus, $A \setminus B$ on joukko, joka voidaan kuvailla seuraavilla tavoilla:

- Erotuksen alkioit saadaan, kun A :n alkioista poistetaan A :n ja B :n yhteiset alkioit.
- Alkio $x \in E$ on leikkauksen alkio, jos ja vain jos x on A :n alkio ja x ei ole B :n alkio.
- $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ja } x \notin B\}$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

2.2 Merkintöjä ja kaavoja

Sovimme seuraavaksi joistakin merkintätavoista, ja kertaamme joukon aikaisemmasta tuttuja kaavoja.

2.2.1 Muuttujat, yhtälöt ja lausekkeet

Kurssin aikana tulemme käyttämään paljon kirjainlaskentaa. Ratkaisemme yhtälöitä ja epäyhtälöitä, joissa esiintyy kirjainmuuttujia. Totuttele muokkaamaan yhtälöitä kirjainmuodossa ennen kuin sijoitat numeroarvot yhtälöön. Vaikka tämä saattaa tuntua vaikealta, se kuitenkin on hyvä tapa oppia käsittelemään kirjainyhtälöitä. Koulukurssissa muuttuja on yleensä x , mutta nyt kirjain tulee vaihtumaan usein. Laskemisen periaatteet eivät ole kiinni käytetystä kirjaimesta.

On hyödyllistä pyrkiä noudattamaan seuraavaa eroa:

Lausekkeet. Kun lasketaan lausekkeen arvoa tai sievennetään lauseketta, kirjoitetaan lähtökohtana oleva lauseke rivin vasempaan reunaan ja sievennetty muoto '='-merkin jälkeen sen oikealle puolelle. Jos lausekkeen käsittely vaatii useamman välimuodon, jatketaan riviä oikealle niin pitkälle, kuin riviä riittää. Jos rivi ei riitä, jatkamme seuraavalta riviltä ensimmäisen '='-merkin kohdalta. Lausekkeen käsittely etenee vasemmalta oikealle.

Yhtälöt. Yhtälöt kirjoitetaan allekain. Yhtälön ratkaisu etenee ylhäältä alaspäin.

Esimerkki 1 Lausekkeen $(x + 1)^2 - (x - 2)^2$ sieventäminen etenee seuraavasti:

$$\underbrace{(x + 1)^2 - (x - 2)^2}_{\longrightarrow} = \underbrace{(x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 4x + 4)}_{\longrightarrow} = 6x - 3$$

tai seuraavasti

$$\begin{aligned} \underbrace{(x + 1)^2 - (x - 2)^2}_{\longrightarrow} &= (x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 4x + 4) \\ &\downarrow = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 \\ &\downarrow = (x^2 - x^2) + (2x + 4x) + (1 - 4) \\ &\downarrow = 6x - 3 \end{aligned}$$

Esimerkki 2 Yhtälön $(x + 1)^2 = (x - 2)^2$ ratkaiseminen etenee seuraavasti:

$$\begin{aligned} &\downarrow \quad (x + 1)^2 = (x - 2)^2 \\ &\downarrow \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 4x + 4 \\ &\downarrow \quad \Leftrightarrow 6x = 3 \quad | : 6 \\ &\downarrow \quad \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.2.2 Kerrattavia kaavoja

Seuraavat kaavat ovat koulukurssista tuttuja. Kertaa ne ja laske itse testitehtävät. Jos saat oikeat tulokset, niin voit sivuuttaa tämän kappaleen nopeasti. Jos saat vääriä vastauksia laskiessasi itse, niin kertaa kyseiset asiat joko vanhojen koulukirjojesi avulla, osallistumalla tukikurssin harjoituksiin tai etsi vastaavaa materiaalia verkosta.

Laskujärjestys. Merkityt laskutoimitukset suoritetaan järjestyksessä: (1) sulkeiden sisällä oleva lauseke, (2) kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle, (3) yhteen- ja vähennyslasku vasemmalta oikealle.

Esimerkki 3

$$\begin{aligned}
 \underline{5 \cdot 2} + 4 - 3 \cdot 3 &= 10 + 4 - \underline{3 \cdot 3} && (2.1) \\
 &= \underline{10 + 4} - 9 \\
 &= \underline{14} - 9 \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{4 \cdot 3} / 6 \cdot 5 &= \underline{12} / 6 \cdot 5 && (2.2) \\
 &= \underline{2 \cdot 5} \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 - 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot (4 - 2 + \underline{3 \cdot 10/15}) &&& (2.3) \\
 &= 3 - 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot (4 - 2 + \underline{30/15}) \\
 &= 3 - 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot (\underline{4 - 2 + 2}) \\
 &= 3 - \underline{2 \cdot (-2)} - \underline{(-2) \cdot 4} \\
 &= \underline{3 - (-4)} - \underline{(-8)} \\
 &= \underline{3 + 4 + 8} \\
 &= 15
 \end{aligned}$$

Taitava laskija oppii tekemään useamman laskun kerralla.

$$\begin{aligned}
 3 - \underline{2 \cdot (-2)} - \underline{(-2) \cdot (4 - 2 + \underline{3 \cdot 10/15})} &&& (2.4) \\
 &= 3 + 4 + 2 \cdot \underline{(4 - 2 + 2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 + 4 + \underline{2 \cdot 4} \\
 &= \underline{3 + 4 + 8} \\
 &= 15
 \end{aligned}$$

Monen asian tekeminen kerralla vähentää välimuotojen määrää ja siten nopeuttaa laskemista. Toisaalta liian monen asian tekeminen kerralla usein tekee merkinnöistä vaikeammin luettavia ja aiheuttaa virheitä. Eri ihmisille sopii erilaiset laskutyyliä. Kun haet omaa tyyliäsi, niin aseta tavoitteeksi, että käytät niin yksinkertaisia askelia ja niin monta välimuotoa, että vastauksiin ei tule huolimattomuusvirheitä. Jos voit tehdä useampia asioita kerralla ilman huolimattomuusvirheitä, niin tiivistä laskujasi. Muista kuitenkin, että välimuotoja tulisi olla niin paljon, että myös toiset ymmärtävät laskujesi välivaiheet.

Laskimen käyttö. Eri laskinten välillä on suuria eroja. On tärkeitä, että opettelet oman laskimesi käytön. Laske seuraavien lausekkeiden arvot laskimella, vertaa saami-asi vastauksia oikeisiin. Jos olet laskenut jonkin arvon väärin, niin selvitä laskuvirheesi syy. Tarvittaessa löydät lisämateriaalia verkosta. (<http://www.oph.fi/etalukio/>)

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \frac{8 - 2 \cdot (-3)}{7} = \\
 \text{(b)} \quad & (20 - 2 \cdot (5 + 10/3) + 2/3)/5 + 2 = \\
 \text{(c)} \quad & \frac{0.0325 \cdot 1.0325^{10}}{1.0325^{10} - 1} = \\
 \text{(d)} \quad & 3^{2/3} = \\
 \text{(e)} \quad & \ln 1.00123 = \\
 \text{(f)} \quad & \frac{1}{4} - \frac{1}{5} =
 \end{aligned}$$

Vastauksia: (a) 2 (b) 2.8 (c) 0.118731 (d) 2.08008382 (e) 0.001229244 (f) 0.05

Murtoluvut. Jatkossa oletetaan, että murtoluvuilla osataan laskea. Jos huomaat epävarmuutta laskemisessasi, kertaa asia.

Olkoon A mitattavissa olevan suureen arvo (luku, rahamäärä, massa, pituus, tms.) ja olkoot n ja m kokonaislukuja. Sovitaan seuraavat sanonta-tavat:

$$\frac{A}{n} = \text{”A:n n:nnäs osa”}$$

(Esim: $\frac{1kg}{10} =$ kilogramman kymmenesosa $= 100g$, $\frac{1h}{4} =$ tunnin neljäsosa $= 15min$.)

$$\frac{m}{n} \cdot A = \text{”m n:nnäs osaa A:sta”}$$

(Esim: $\frac{3}{10} \cdot 1kg =$ kolme kymmenesosaa kilogrammasta $= 300g$, $\frac{3}{4} \cdot 1h =$ kolme neljäsosaa tunnista $= 45min$.)

$$\frac{A}{100} = \text{”sadasosa A:sta = prosentti A:sta”}$$

$$\frac{p}{100} \cdot A = \text{”p sadasosaa A:sta = p prosenttia A:sta”}$$

$$\frac{1}{n} = \text{”yksi n:nnäs osa”}$$

(Esim: $\frac{1}{10} =$ yksi kymmenesosa $= 0.1$, $\frac{1}{4} =$ yksi neljäsosa $= 0.25$.)

$$\frac{m}{n} = \text{”m n:nnäs osaa”}$$

(Esim: $\frac{3}{10} =$ kolme kymmenesosaa $= 0.3$, $\frac{3}{4} =$ kolme neljäsosaa $= 0.75$.)

Olkoon seuraavassa $n \neq 0$. Tärkeimmät murtolukukaavat ovat :

$$\frac{p}{n} + \frac{m}{n} = \frac{p+m}{n} \quad \text{saman nimiset murtoluvut lasketaan yhteen}$$

$$\frac{p \cdot m}{p \cdot n} = \frac{m}{n} \quad \text{yhteinen tekijä voidaan supistaa pois}$$

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{n \cdot p}{n \cdot q} + \frac{q \cdot m}{q \cdot n} = \frac{np + mq}{nq}$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{p \cdot m}{q \cdot n}$$

$$p = \frac{p}{1} \quad \text{kokonaisluku voidaan tulkita murtoluvuksi}$$

$$p \cdot \frac{m}{n} = \frac{p}{1} \cdot \frac{m}{n} = \frac{p \cdot m}{n}$$

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}$$

$$\frac{m}{n} : p = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{p} = \frac{m}{n \cdot p}$$

Seuraavassa on joukko testitehtäviä.

- (A) Laske ne ilman laskinta ja vertaa saamiasi tuloksia vastauksiin. Lopputulos yleensä supistetaan niin yksinkertaiseksi kuin mahdollista. Jos tämä tuloksen siistiminen jää tekemättä, niin tämä ei ole vakava virhe, koska numeroarvo desimaalilukuna on oikein. Kun vertaat vastuksiasi oikeisiin, tarkista myös laskimella desimaaliarvo.
- (B) Lopuksi testaa lausekkeiden laskeminen laskimella niin, että lasket lausekkeiden arvot suoraan laskimella.

Jos testitehtävissä tulee virheitä, niin selvitä virheiden syy. Suhtaudu nyt virheisiin vakavasti, koska ne ennakoivat vaikeuksia myöhemmin.

Testitehtäviä:

- a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} =$
- b) $\frac{3}{4} - \frac{4}{5} =$
- c) $\frac{3}{7} \cdot \frac{(1 - \frac{1}{3})}{\frac{1}{4}} =$
- d) $\frac{3+1}{7} : \frac{7}{3+9} =$
- e) $\frac{3+1}{7} \cdot \frac{7}{3+9} =$
- f) $\frac{3}{4} - \frac{3}{2} : 6 =$

Vastauksia:

- a) $\frac{9}{20} \sim 0.45$ b) $-\frac{1}{20} \sim -0.05$ c) $\frac{8}{7} = 1\frac{1}{7} \sim 1.1428571428571428571428571428571 \dots$
- d) $\frac{48}{49} \sim 0.97959183673469387755102040816327$ e) $\frac{1}{3} \sim 0.333333 \dots$ f) $\frac{1}{2} \sim 0.5$

Prosentti. Prosenttikäsitteen ydin on jo edellä esiintynyt kaava

$$”x \text{ on } p \text{ prosenttia } a\text{:sta}” \Leftrightarrow x = \frac{p}{100} a$$

Tästä voi helposti johtaa lähes kaiken prosenttilaskennan. Jos olet koulussa oppinut käsittelemään prosenttiongelmiä ”pilkkua siirtelemällä” ja kertomalla sopivalla desimaaliluvulla, niin tämä ei jatkossa riitä. Lukion matematiikan kurssilla usein opetaan juuri sen verran, että tietyt ylioppilastehtävissä mahdolliset tyyppitehtävät osataan. Jos kuitenkin tutkittavaksi tulee ongelma, jossa perusarvo (edellä a eli se luku, josta sadasosat otetaan) ei ole heti näkyvillä, niin nämä kikat eivät monestikaan riitä.

Prosentteista on myöhemmin oma kappaleensa ja silloin kannattaa esimerkit käydä huolellisesti läpi. Yleissääntö on: ’Muodosta yhtälö, ratkaise tuntematon ja tulkitse tulos.’

Potenssikaavat.

Sovitaan merkintä:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}} = a^n$$

Määritelmän perusteella voidaan helposti osoittaa tosiksi seuraavat kaavat.

samankantaisten potenssien tulo ja osamäärä

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad \text{kaikille } a \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad \text{kaikille } a \neq 0, a \in \mathbb{R}, n > m, n, m \in \mathbb{N}$$

samaa astetta olevien potenssien tulo ja osamäärä

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad \text{kaikille } a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad \text{kaikille } b \neq 0, a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

potenssin potenssi

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Tekemällä sopimuksen ja merkintäsopimuksen

$$a^0 = 1, \text{ kaikilla } a \neq 0, a \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ kaikilla } a \neq 0, a \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

saamme poistettua suurimman osan edellä olleiden kaavojen lisäehdoista. Kun muistaa, että 0^0 ja $0/0$ eivät ole hyvin määriteltyjä ja nolllalla ei saa jakaa, niin kaavat voidaan kirjoittaa muotoon:

sopimukset

$$a^0 = 1, \quad \text{kaikilla } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \text{kaikilla } a \neq 0$$

samankantaisten potenssien tulo ja osamäärä

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad \text{kaikille } a \neq 0$$

samaa astetta olevien potenssien tulo ja osamäärä

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n,$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad \text{kaikille } b \neq 0$$

potenssin potenssi

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Testitehtäviä:

a) $\frac{2^7}{2^3} =$

b) $\frac{3^2}{2^2} - \frac{1}{4} =$

c) $\frac{(3^3)^2}{9^2} =$

d) $\frac{3^2 + 1}{5} : \frac{5}{2^{-2}} =$

Vastauksia:

a) 16 b) 2 c) 9 d) $\frac{1}{10} \approx 0.1$

Juurikaavat. Luvun a neliöjuurella \sqrt{a} tarkoitetaan yhtälön $x^2 = a$ ei-negatiivista juurta. Määritelmä edellyttää, että $a \geq 0$. Tavalliset juurikaavat ovat:

$$\text{tulon juuri } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad \text{kaikilla } a, b \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{osamäärän juuri} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, & \text{kaikille } a \geq 0, b > 0 \\ \text{neliön juuri} \quad \sqrt{a^2} &= |a|, & \text{kaikille } a \in \mathbb{R} \\ \text{juuren neliö} \quad (\sqrt{a})^2 &= a, & \text{kaikille } a \geq 0 \end{aligned}$$

2.3 Välimerkinnät ja itseisarvo

2.3.1 Välimerkinnät

Jos x on suurempi kuin 3 ja x on pienempi kuin 5, niin merkitsemme $3 < x < 5$. Sovimme seuraavista joukkomerkinnöistä:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} =]a, b[= (a, b) \quad (2.7)$$

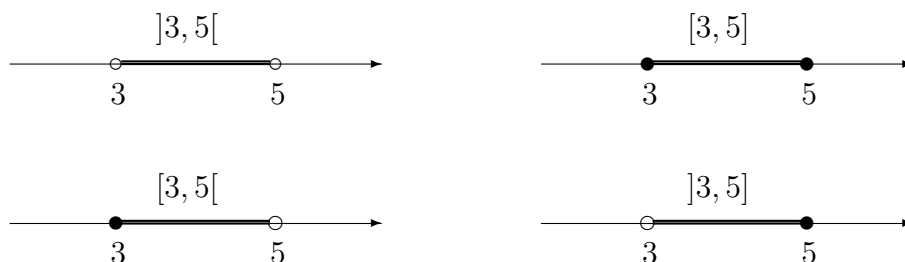
$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} = [a, b] \quad (2.8)$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} =]a, b] = (a, b] \quad (2.9)$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} = [a, b[= [a, b) \quad (2.10)$$

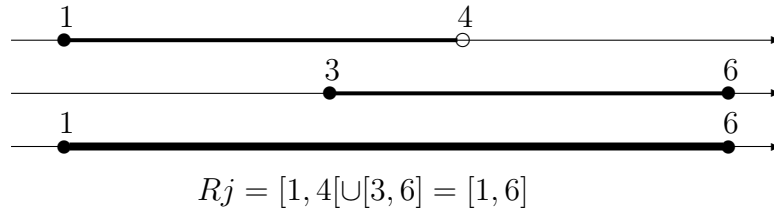
Yleisin ratkaisu tässä yhteydessä on käyttää kaarisulkeita aidon erisuuruuden tapauksessa, mutta myös hakasulkeita käytetään. Me tulemme käyttämään hakasulkeita, koska siten saadaan aikaan riittävä ero tason pisteen merkinnälle ja välimerkinnälle.

Välit tulee osata merkitä myös lukusuoralle. Välin päätepisteet merkitään lukusuoralle. Jos päätepiste ei sisälly väliin merkitään avoin pallo, jos päätepiste sisältyy väliin, merkitään suljettu pallo. Päätepisteiden väliin jäävä jana korostetaan.



HUOMAA, että on eri asia yhdistää joukkoja ja toinen asia yhdistää ehtoja.

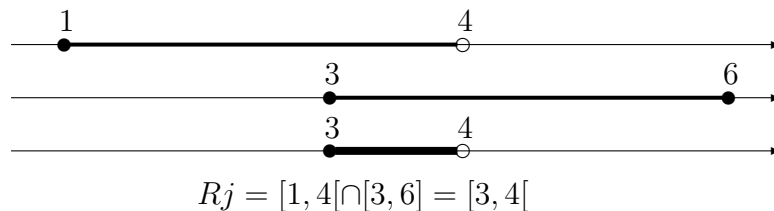
Esimerkki 4 (1) Jos ratkaisujoukko muodostuu välistä $[1, 4[$ ja välistä $[3, 6]$, niin yhdistämällä VÄLIT saamme ratkaisujoukoksi



(2) Jos ratkaisujoukko muodostuu niistä x :n arvoista jotka toteuttavat ehdon $1 \leq x < 4$ ja ehdon $3 \leq x \leq 6$, niin yhdistämällä EHDOT saamme kokonaisehdoksi

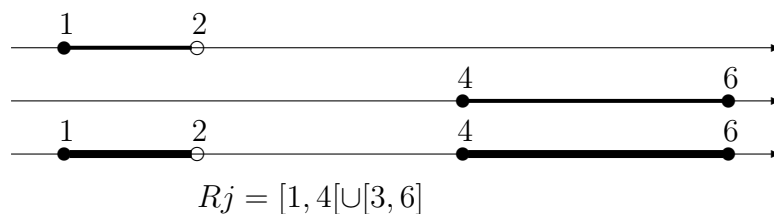
$$\begin{aligned} & (1 \leq x < 4) \text{ ja } (3 \leq x \leq 6) \\ \Leftrightarrow & (1 \leq x) \text{ ja } (3 \leq x) \text{ ja } (x < 4) \text{ ja } (x \leq 6) \\ \Leftrightarrow & 3 \leq x < 4 \\ \Leftrightarrow & R_j = [3, 4[\end{aligned}$$

Piirtämällä välit lukusuorille, näemme, että tapauksessa (2) ratkaisujoukko on $R_j = [1, 4[\cap [3, 6] = [3, 4[$.



Esimerkki 5 Otamme vielä vastaavan esimerkin, mutta hieman erilaisilla numeroilla.

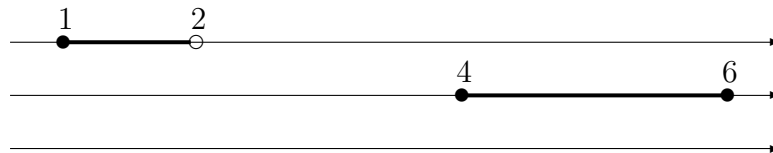
(1) Jos ratkaisujoukko muodostuu välistä $[1, 2[$ ja välistä $[4, 6]$, niin yhdistämällä VÄLIT saamme ratkaisujoukoksi



(2) Jos ratkaisujoukko muodostuu niistä x :n arvoista jotka toteuttavat ehdon $1 \leq x < 2$ ja ehdon $4 \leq x \leq 6$, niin yhdistämällä EHDOT saamme kokonaisehdoksi

$$\begin{aligned} & (1 \leq x < 2) \text{ ja } (4 \leq x \leq 6) \\ \Leftrightarrow & (1 \leq x) \text{ ja } (4 \leq x) \text{ ja } (x < 2) \text{ ja } (x \leq 6) \\ \Leftrightarrow & (4 \leq x) \text{ ja } (x < 2) \quad (\text{mahdotonta!}) \\ \Leftrightarrow & R_j = \emptyset \end{aligned}$$

Piirtämällä välit lukusuorille, näemme, että tapauksessa (2) ratkaisujoukko on $R_j = [1, 2[\cap [4, 6] = \emptyset$.



$$R_j = [1, 2[\cap [4, 6] = \emptyset$$

Sovimme myös seuraavista muodollisista merkintätavoista (∞ = "ääretön")

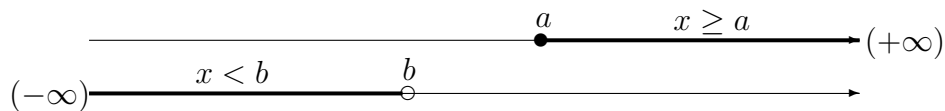
$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} =]a, \infty[= (a, \infty) \quad (2.11)$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} = [a, \infty[= [a, \infty) \quad (2.12)$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} =]-\infty, b] = (-\infty, b] \quad (2.13)$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} =]-\infty, b[= (-\infty, b) \quad (2.14)$$

Lukusuoralla



2.3.2 Itseisarvo

Luvun itseisarvolla tarkoitetaan luvun numero-osaa ilman mahdollista etumerkkiä.

Siis

$$|-7| = 7, \quad |2| = 2, \quad |-100| = 100, \quad \text{jne...}$$

Niin kauan kun puhutaan yksittäisistä luvuista, asia on aika selvä, mutta nyt meidän on selvitettävä, mitä tarkoitetaan lausekkeen itseisarvolla!

Määritelmä 6 *Lausekkeen a itseisarvo on*

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kun } a \geq 0, \\ -a, & \text{kun } a < 0. \end{cases}$$

Siis

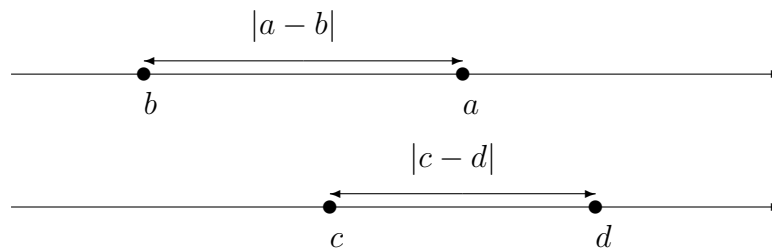
$$\begin{aligned} |-7| &= -(-7) = 7 && \text{(alemman kaavan mukaan),} \\ |2| &= 2 && \text{(ylemmän kaavan mukaan),} \\ |-100| &= -(-100) = 100 && \text{(alemman kaavan mukaan).} \end{aligned}$$

Jos tiedämme varmasti lausekkeen merkin, niin pystymme kirjoittamaan lausekkeen ilman itseisarvomerkkejä. Esimerkiksi $|x^2 + 1| = x^2 + 1$.

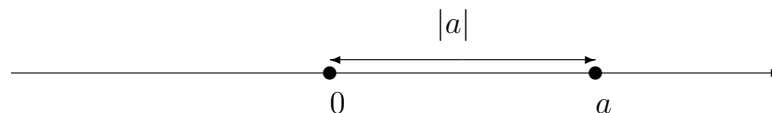
Kahden luvun a ja b etäisyys lukusuoralla on $|a - b|$, sillä

$$|a - b| = \begin{cases} a - b & \text{kun } a - b \geq 0 \Leftrightarrow a \geq b \\ b - a & \text{kun } a - b < 0 \Leftrightarrow a < b \end{cases},$$

joten kummassakin tapauksessa tapauksessa isommasta vähennetään pienempi ja näinpäin laskettu erotus on järkevä mitta etäisyydelle.



Erityisesti luvun a itseisarvo voidaan tulkita a :n ja nollan etäisyydeksi $|a| = |a - 0|$



2.4 Prosentti

Prosentti tarkoittaa yhtä sadasosaa (latinaksi 'pro centum', englanniksi 'per cent', espanjaksi 'por ciento'). p prosenttia, $p\%$, on p sadasosaa. Seuraavat lauseet sanovat siis saman asian.

$$\begin{aligned} & \text{”Maksu on 5 prosenttia 600 eurosta.”} \\ \Leftrightarrow & \text{”Maksu on 5 sadasosaa 600 eurosta.”} \\ \Leftrightarrow & \text{”Maksu on } 5 \cdot \frac{600\text{€}}{100} \\ \Leftrightarrow & \text{”Maksu on } \frac{5}{100} \cdot 600\text{€} \\ \Leftrightarrow & \text{”Maksu on } 0.05 \cdot 600\text{€} \end{aligned}$$

Sovimme ensin seuraavista termeistä. Jos b on p prosenttia a :sta, eli

$$b = \frac{p}{100} \cdot a,$$

niin sanomme, että

$$\begin{aligned} a &= \text{perusarvo (mihin verrataan?)(minkä sadasosista on kysymys?)} \\ p &= \text{prosenttiluku (miten monta sadasosaa?)} \\ b &= \text{prosenttiarvo (mitä verrataan?)} \\ \frac{p}{100} &= \text{prosenttikerroin (millä kerrotaan)} \end{aligned}$$

Esimerkki 7 *Olkoon tuotteen alkuperäinen hinta 23.00€. Jos se myydään 20% alennuksella, niin alennettu hinta on 80% alkuperäisestä. Mikä tämä alennettu hinta on?*

Ratkaisu: merkitään

$$\begin{aligned} \text{perusarvo} &= 23.00\text{€} \\ \text{prosenttikerroin} &= \frac{80}{100} = 0.80 \\ \text{prosenttiarvo} &= x = \text{alennettu hinta} \end{aligned}$$

Siis

$$x = \frac{80}{100} \cdot 23.00\text{€} = 18.40\text{€}$$

Esimerkki 8 Erään tuotteen valmistuskustannus on 123.00€ ja sen myyntihinta on 141.00€. Sikkoin kate (myyntitulo- valmistuskustannus) on $141.00\text{€} - 123.00\text{€} = 18.00\text{€}$. Kate on silloin 12.77% myyntihinnasta, sillä

$$\frac{18.00\text{€}}{141.00\text{€}} \cdot 100\% = 12.77\%.$$

Millä myyntihinnalla kate olisi 10% myyntihinnasta?

Ratkaisu: merkitään

$$\begin{aligned} \text{perusarvo} &= x = \text{myyntihinta} \\ \text{prosenttikerroin} &= \frac{10}{100} = 0.10 \\ \text{prosenttiarvo} &= x - 123.00\text{€} = \text{kate} \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} x - 123.00\text{€} &= \frac{10}{100} \cdot x \\ \Leftrightarrow x - 0.1x &= 123.00\text{€} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{123.00\text{€}}{0.9} = 136.67\text{€} \end{aligned}$$

2.4.1 Kahden luvun vertaaminen

Jos y on $p\%$ suurempi kuin x , niin eroa verrataan ”kuin”-arvoon. Siis

$$\begin{aligned} \text{perusarvo} &= x = (\text{”kuin”-arvo}) \\ \text{prosenttiluku} &= p \\ \text{prosenttiarvo} &= y - x = \text{ero} \end{aligned}$$

$$y - x = \frac{p}{100} \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad y = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot x$$

Jos y on $p\%$ pienempi kuin x , niin eroa verrataan ”kuin”-arvoon. Siis

$$\text{perusarvo} = x = (\text{”kuin”-arvo})$$

prosenttiluku = p

prosenttiarvo = $x - y =$ ero

$$x - y = \frac{p}{100} \cdot x \Leftrightarrow y = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot x$$

2.4.2 Arvon muuttuminen

Olkoon seuraavassa alkuperäinen arvo x ja muuttunut arvo X .

Jos x kasvaa $p\%$, niin muutosta verrataan alkuperäiseen arvoon

perusarvo = $x =$ alkuperäinen arvo

prosenttiluku = p

prosenttiarvo = $X - x =$ muutos

$$X - x = \frac{p}{100} \cdot x \Leftrightarrow X = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot x$$

Jos x pienenee $p\%$, niin muutosta verrataan alkuperäiseen arvoon

perusarvo = $x =$ alkuperäinen arvo

prosenttiluku = p

prosenttiarvo = $x - X =$ muutos (plus-merkkisenä)

$$x - X = \frac{p}{100} \cdot x \Leftrightarrow X = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot x$$

Jos x on $p\%$ arvosta y ja x kasvaa d prosenttiyksikköä, niin X on $(p + d)\%$ y :stä.

perusarvo = y

prosenttiluku = $p + d$

prosenttiarvo = $X =$ muuttunut arvo

$$X = \frac{p + d}{100} \cdot y \Leftrightarrow X = \frac{p + d}{p} \cdot x$$

Jos x on $p\%$ arvosta y ja x pienenee d prosenttiyksikköä, niin X on $(p - d)\%$ y :stä.

$$\begin{aligned} \text{perusarvo} &= y \\ \text{prosenttiluku} &= p - d \\ \text{prosenttiarvo} &= X = \text{muuttunut arvo} \end{aligned}$$

$$X = \frac{p - d}{100} \cdot y \Leftrightarrow X = \frac{p - d}{p} \cdot x$$

2.5 Yhtälöt ja epäyhtälöt

Yhtälöiden ratkaiseminen on hyvin keskeinen taito, joka tällä kurssilla tulee hankkia ja harjoittaa. Yhtälöt eivät ole vaikeita, mutta oleellista on se, että tulet tarkastelemaan yhtälöitä, jotka syntyvät hieman yllättäen ja varoittamatta.

Koulussa olet useimmiten kotilaskua laskiessasi jo valmiiksi tiennyt, millainen yhtälö ratkaistavaksesi tulee. Nyt on tärkeätä tottua siihen, ettei alussa tiedä, mitä laskun aikana tapahtuu. Laskuun tulee uskaltaa heittäytyä luottaen siihen, että joka käänteessä osaa toimia oikein. Tämä luottamus syntyy harjoittelun kautta. Tässä tarkoitettua taitoa ei opi lukemalla seuraavat kolme sivua, vaan harjoittelemalla ahkerasti seuraavat kolme kuukautta.

Kaikkien yhtälöiden käsittelyssä on samat perusaskeleet:

- Termi saa vaihtaa yhtälön puolta, jos se samalla vaihtaa merkkiä.
- Yhtälön saa jakaa nolasta eroavalla luvulla (muista jakaa jokainen termi).
- Yhtälön voi kertoa nolasta poikkeavalla luvulla (muista kertoa jokainen termi).

Epäyhtälöiden käsittelyssä on yksi tärkeä ero edelliseen:

- Yhtälön saa jakaa ja kertoa nolasta eroavalla luvulla, mutta kerrottaessa tai jaettaessa negatiivisella luvulla erisuuruus-merkki kääntyy.
- Epäyhtälön saa myös kertoa (jakaa) lausekkeella, jos varmasti tiedämme kertojan (jakajan) merkin.

Tarkastelemme seuraavaksi yhtälöitä ja epäyhtälöitä tyypeittäin. Osa materiaalista on koulusta tuttua, mutta osa voi olla uutta.

2.5.1 I asteen yhtälö

Ensimmäisen asteen x :n yhtälö ratkaistaan seuraavasti.

1. Poista tarpeettomat sulut ja nimittäjät.
2. Perusaskelten avulla muunna yhtälö muotoon $x = \textit{lauseke}$.
3. Edeltävä vaihe voi epäonnistua vain, jos x häviää pois yhtälöstä. Jos näin syntynyt yhtälö on tosi, on alkuperäinen yhtälö identtisesti tosi, eli aina tosi (ratkaisujoukko sisältää silloin kaikki reaalityöt ($R_j = \mathbb{R}$)). Jos syntynyt yhtälö on epätosi, ei yhtälöllä ole juurta (ratkaisujoukko on silloin tyhjä ($R_j = \emptyset$)).

Esimerkki 9 *Kaksi erillistä yhtälöesimerkkiä*

<p>a)</p> $\begin{aligned} 5(x-1) &= x+7 \\ \Leftrightarrow 5x-5 &= x+7 \\ \Leftrightarrow 5x-x &= 7+5 \\ \Leftrightarrow 4x &= 12 & :4 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned}$		<p>b)</p> $\begin{aligned} \frac{2x+1}{2} + 1 &= x & \cdot 2 \\ \Leftrightarrow \frac{2 \cdot (2x+1)}{2} + 2 \cdot 1 &= 2 \cdot x \\ \Leftrightarrow 2x+1+2 &= 2x \\ \Leftrightarrow 2x-2x &= -1-2 \\ \Leftrightarrow 0 &= -3 & \text{epätosi!} \\ \Leftrightarrow R_j &= \emptyset \end{aligned}$
--	--	--

Vastaus a) yhtälön juuri on 3, b) yhtälöllä ei ole juurta ($R_j = \emptyset$).

Edellä ei erillisen vastauksen kirjoittaminen tunnu kovin tarpeelliselta. Jokainen lukija varmasti osaa tulkita yhtälön juuret yhtälön ratkaisun viimeisen rivin merkinnöistä. Jatkossa kuitenkin ongelmat muuttuvat vähitellen mutkikkaammiksi, ja vastauksen kirjoittaminen täsmällisesti on tärkeä taito.

PERIAATE: Jos ratkaisin yhtälön, koska esimieheni kysyi minulta erästä seikkaa, niin jos mahdollista kirjoitan ratkaisuni perään vastauksen, joka vastaa esitettyyn kysymykseen.

Esimerkki 10 *Yritys valmistaa tuotetta kuukaudessa x kappaletta. Tällä hetkellä $x = 200$ kpl/kk. Tuotteen myyntihinta on 12.35€ . Yhden tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 8.50€ ja viikossa kiinteät kustannukset ovat 250€ . Miten paljon pitää tuotteita valmistaa kuukaudessa, jotta myyntitulo on sama kuin valmistuskustannukset kuukaudessa?*

Ratkaisu: Kirjoitetaan yhtälö, jonka vasen puoli on myyntitulo kuukauden ajalta ja oikea puoli on valmistuskustannukset samalta ajalta.

$$\begin{aligned} x \cdot 12.35 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} &= x \cdot 8.50 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} + 4 \frac{\text{vko}}{\text{kk}} \cdot 250 \frac{\text{€}}{\text{vko}} \\ \Leftrightarrow x \cdot 3.85 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} &= 1000.00 \frac{\text{€}}{\text{kk}} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1000.00}{3.85} \cdot \frac{\text{€}}{\text{kk}} \cdot \frac{\text{kpl}}{\text{€}} \approx 259.74 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \end{aligned}$$

Vastaus: Tuotteita tulee valmistaa kuukaudessa 282 kappaletta.

2.5.2 II asteen yhtälö

Toisen asteen yhtälön normaalimuoto on

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.15}$$

ja se ratkaistaan kaavalla

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2.16}$$

Jos juurettava eli diskriminantti $D = b^2 - 4ac$ on positiivinen, niin juuria on kaksi. Jos diskriminantti on nolla, saadaan yksi juuri. Jos diskriminantti on negatiivinen, niin yhtälöllä ei ole reaalisia juuria.

$$\begin{aligned} D > 0 &\longrightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\ D = 0 &\longrightarrow x = \frac{-b}{2a} \\ D < 0 &\longrightarrow R_j = \emptyset \end{aligned}$$

Esimerkki 11 *Edellisessä esimerkissä (10) oletettiin myyntihinnan pysyvän vakiona. Usein kuitenkin on niin, että lisättäessä tuotantoa on myyntihintaa laskettava, jotta*

tuotanto saadaan myytyä. Nyt on arvioitu, että myyntihinta riippuu valmistusmäärästä seuraavasti

$$p = 14.35 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} - 0.01 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x.$$

Yhden tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 8.50€ ja kuukaudessa kiinteät kustannukset ovat 1000€. Miten paljon nyt pitää tuotteita valmistaa kuukaudessa, jotta myyntitulo on sama kuin valmistuskustannukset kuukaudessa?

Ratkaisu: Vastaavasti kuin edellä kirjoitimme taas yhtälön, jonka vasemmalla puolella on kuukauden myyntitulo ja oikealla puolella vastaavan ajan valmistuskustannukset

$$\begin{aligned} p \cdot x &= x \cdot 8.50 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} + 1000 \frac{\text{€}}{\text{kk}} \\ \Leftrightarrow \left(14.35 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} - 0.01 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x \right) \cdot x &= x \cdot 8.50 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} + 1000 \frac{\text{€}}{\text{kk}} \\ \Leftrightarrow 5.85 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} \cdot x - 0.01 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x^2 &= 1000 \frac{\text{€}}{\text{kk}} \\ \Leftrightarrow -0.01 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x^2 + 5.85 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} \cdot x - 1000 \frac{\text{€}}{\text{kk}} &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälö on nyt normaalimuodossa, joten teemme sijoitukset ratkaisukaavaan.

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5.85 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} \pm \sqrt{5.85^2 \frac{\text{€}^2}{\text{kpl}^2} - 4 \cdot \left(-0.01 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \right) \cdot \left(-1000 \frac{\text{€}}{\text{kk}} \right)}}{2 \cdot \left(-0.01 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \right)}$$

Nyt juurettavassa yksikkö on $(\text{€}^2)/(\text{kpl}^2)$ joten koko osoittajan yksikkö on $\text{€}/\text{kpl}$. Silloin ratkaisukaavan mukaisen juuren yksikkö on

$$\frac{\text{€}}{\text{kpl}} \cdot \frac{\text{kpl}^2}{\text{€} \cdot \text{kk}} = \frac{\text{kpl}}{\text{kk}}$$

kuten pitääkin. Nyt voimme keskittyä numerolaskuun.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x &= \frac{-5.85 \pm \sqrt{5.85^2 - 4 \cdot (-0.01) \cdot (-1000)}}{2 \cdot (-0.01)} \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \\ &= \frac{-5.85 \pm \sqrt{-5.78}}{-0.02} \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \end{aligned}$$

Diskriminantti on negatiivinen, joten yhtälöllä ei ole reaalisia juuria. Myyntitulo kuukaudessa on siis eri suuri kuin valmistuskustannus kaikilla x :n arvoilla. Siis valmistetaan miten paljon tahansa, niin tulot eivät riitä kustannusten kattamiseen.

Vastaus: Millään valmistusmäärällä myyntitulo ei ole sama kuin valmistuskustannus.

Testitehtäviä: Ratkaise seuraavat toisen asteen yhtälöt

- a) $3x^2 - 2x + 1 = 0$
- b) $x(x + 6) = 7$
- c) $3x^2 - 1 = x(x - 4)$
- d) $(x - 2)(x + 4) = 7$
- e) $(x - 2)(x - 2) = -1$
- f) $2x^2 - x(x + 1) = x(x - 2) + 1$

Vastauksia:

- a) $x_1 = 1, x_2 = -1/3$ b) $x_1 = 1, x_2 = -7$ c) $x_1 = 0.224745, x_2 = -2.24745$
- d) $x_1 = 0.414214, x_2 = -2,414214$ e) $R_j = \emptyset$ f) $x = 1$

2.5.3 Korkeamman asteen yhtälöt

Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöt voidaan ratkaista niihin liittyvillä ratkaisukaavakokoelmilla. Kaavat ovat sen verran mutkikkaita, ettei niitä tällä kurssilla opetella. Seuraavassa opimme käsittelemään kolmannen asteen yhtälöä, kun yksi juuri tunnetaan. Menetely yleisty helposti vielä korkeampiulotteisille yhtälöille.

Olkoon tarkasteltavana yhtälö

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \quad (2.17)$$

Jos tiedämme, että yksi juuri on $x = z$, niin silloin yhtälö (2.17) voidaan kirjoittaa muotoon

$$(2.17) \Leftrightarrow (x - z)(x^2 + b_1x + b_0) = 0 \quad (2.18)$$

missä b_1 ja b_0 voidaan valita siten, että yhtälöiden (2.17) ja (2.18) vasemman puolen lausekkeet ovat identtiset. Siis

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - z)(x^2 + b_1x + b_0)$$

$$\begin{aligned}
&= x^3 + (b_1 - z)x^2 + (b_0 - zb_1)x - b_0z \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_1 = a_2 + z \\ -zb_1 + b_0 = a_1 \\ -zb_0 = a_0 \end{array} \right. \begin{array}{l} +z \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_1 = a_2 + z \\ b_0 = a_1 + a_2z + z^2 \\ -zb_0 = a_0 \end{array} \right. \begin{array}{l} +z \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_1 = a_2 + z \\ b_0 = a_1 + a_2z + z^2 \\ 0 = \underbrace{a_0 + a_1z + a_2z^2 + z^3}_{=0} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_1 = a_2 + z \\ b_0 = a_1 + b_1z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Esimerkki 12 Ratkaise yhtälö

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Yksi yhtälön juuri on $x = -2$. (Tämän näkee suoraan sijoittamalla x :n paikalle -2 , jolloin yhtälö tulee todeksi.)

Silloin $b_1 = a_2 + z = -3 + (-2) = -5$ ja $b_0 = a_1 + b_1z = -6 + (-5) \cdot (-2) = 4$. Siis

$$\begin{aligned}
x^3 + 3x^2 - 3x - 10 = 0 &\Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 5x + 4) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x + 2)(x - 1)(x - 4) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -2 \quad \text{tai} \quad x = 1 \quad \text{tai} \quad x = 4
\end{aligned}$$

Edellä esietty on erikoistapaus seuraavasta yleisemmästä tuloksesta.

Lause 13 Jos $P_n(x)$ on astetta n oleva polynomi, ja $P_n(x_1) = 0$, niin on olemassa astetta $n - 1$ oleva polynomi $Q_{n-1}(x)$, jolle

$$P_n(x) = (x - x_1)Q_{n-1}(x), \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

□

Jos polynomilla $Q_{n-1}(x)$ on edelleen reaalinen nollakohta x_2 siten, että $Q_{n-1}(x_2) = 0$, niin on olemassa polynomi $Q_{n-2}(x)$ siten, että

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)Q_{n-2}(x), \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Toistamalla tätä menettelyä niin kauan, kuin reaalisia nollakohtia löytyy, saamme seuraavan tuloksen.

Lause 14 (1) Jos $P_n(x)$ on astetta n oleva polynomi, niin se voidaan aina kirjoittaa muotoon

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k)Q(x), \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R},$$

missä luvut x_1, x_2, \dots, x_k ovat polynomien $P(x)$ reaaliset nollakohdat ja astetta $n - k$ olevalla polynomilla $Q(x)$ ei ole reaalisia nollakohtia.

(2) n :nnen asteen yhtälöllä on enintään n kappaletta reaalisia juuria.

□

Korkeamman asteen yhtälöitä emme tällä kurssille juurikaan ratko. Aina kun mallinamme jotakin taloudellista ilmiötä, pyrimme korkeintaan astetta kaksi oleviin yhtälöihin. Jos kuitenkin joudut opintojesi aikana ratkaisemaan kolmatta tai korkeampaa astetta olevan yhtälön, niin tässä kannattaa käyttää hyväksi Newtonin menetelmää, joka opetellaan derivoinnin yhteydessä tai jotakin symbolisen laskennan ohjelmistoa (Mathematica, Matlab, tms.).

Jotta osaisimme oikein tulkita ohjelmien antamat tulosteet, on osattava kompleksilukujen perusteet. Tätä varten palaamme tähän aiheeseen uudelleen kappaleessa, jonka pääaihe on kompleksiluvut.

2.5.4 I asteen epäyhtälö

Ensimmäisen asteen epäyhtälöä käsitellään muuten samoin kuin yhtälöä, mutta kerrottaessa tai jaettaessa negatiivisella luvulla, erisuuruusmerkki kääntyy.

Huomaa, että taloudellisissa sovelluksissa usein epäyhtälö on luonnollisempi kuin yhtälö. Yleensä yritys haluaa, että sen tulot ovat suuremmat kuin sen menot. Jos ratkaisemme yhtälön ”tulot = menot” ja toimimme ratkaisun ohjaamina, saatamme toimia vähemmän kannattavasti kuin jos olisimme tutkineet epäyhtälön ”tulot > menot” ratkaisua luovasti.

Esimerkki 15 Yritys valmistaa tuotetta kuukaudessa määrän x (kpl/kk). Tuotteen myyntihinta on 18.35€. Jokaisen tuotteen valmistaminen aiheuttaa muuttuvia valmistuskustannuksia 15.50€. Kiinteät kustannukset ovat 8 500€/kk. Edellisen kuukauden aikana yritys valmisti 5 000 tuotetta, jolloin kate oli

$$\begin{aligned} \text{kate} &= \text{myyntitulo} - \text{muuttuvat kustannukset} \\ &= 5\,000 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 18.35 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} - 5\,000 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 15.50 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} \\ &= 91\,750\text{€/kk} - 77\,500\text{€/kk} \\ &= 14\,250\text{€/kk} \end{aligned}$$

ja vastaavasti kuukauden tulos oli

$$\begin{aligned} \text{tulos} &= \text{kate} - \text{kiinteät kustannukset} \\ &= 14\,250 \frac{\text{€}}{\text{kk}} - 8\,500 \frac{\text{€}}{\text{kk}} \\ &= 5\,750\text{€/kk}. \end{aligned}$$

Tulos on nyt positiivinen, eli yritys tekee voittoa. Voitto (tulos) oli 6.3% myynnistä, sillä

$$\frac{\text{voitto}}{\text{myynti}} \cdot 100\% = \frac{5\,750\text{€/kk}}{91\,750\text{€/kk}} \cdot 100\% = 6.267\% \approx 6.3\%$$

Miten suuri pitää valmistusmäärän olla, jotta voitto olisi vähintään 10% myynnistä? Kirjoitetaan vastaava epäyhtälö, kun tuotantomäärä on x .

$$\begin{aligned} \text{voitto} &\geq \frac{10}{100} \cdot \text{myynti} \\ \Leftrightarrow x \cdot (18.35 - 15.50)\text{€/kpl} - 8\,500\text{€/kk} &\geq 0.1 \cdot x \cdot 18.35\text{€/kpl} \\ \Leftrightarrow x \cdot 1.015\text{€/kpl} &\geq 8\,500\text{€/kk} \quad | : 1.015\text{€/kpl} \\ \Leftrightarrow x &\geq 8\,375\text{kpl/kk} \end{aligned}$$

Vastaus: Jos tuotantomäärä on vähintään 8 375kpl/kk, niin voitto on vähintään 10% myynnistä.

2.5.5 Epäjatkuvuuden huomiointi

Usein epäyhtälössä esiintyvät lausekkeet sisältävät epäjatkuvuuksia. Silloin epäyhtälö ei enää olekaan oikea ensimmäisen asteen epäyhtälö.

Kun epäjatkuvuuskohdat merkitään lukusuoralle (x -akselille), niin nämä kohdat jakavat lukusuoran väleihin siten, että kullakin välillä epäyhtälö voidaan kirjoittaa yksinkertaiseen muotoon. Seuraava esimerkki valaisee asiaa.

Esimerkki 16 *Tarkastellaan uudelleen esimerkin (15) yritystä. Yritys valmistaa tuotetta kuukaudessa määrän x (kpl/kk). Tuotteen myyntihinta on 18.35€. Jos tuotantomäärä on riittävän suuri, on mahdollista saada raaka-ainehankintojen yhteydessä määrälennuksia. Määrälennuksista johtuen muuttuvat kustannukset ovat*

$$\text{muuttuvat kustannukset} = \begin{cases} x \cdot 15.50\text{€/kpl}, & \text{kun } x \leq 12\,000 \\ x \cdot 14.75\text{€/kpl}, & \text{kun } x > 12\,000 \end{cases}$$

Vastaavasti kiinteät kustannukset ovat

$$\text{kiinteät kustannukset} = \begin{cases} 8\,500\text{€/kk}, & \text{kun } x \leq 9\,000 \\ 10\,500\text{€/kk}, & \text{kun } x > 9\,000 \end{cases} .$$

Tämä epäjatkuvuus kiinteissä kustannuksissa on (esimerkiksi) seurausta siitä, että laajennettaessa tuotantoa, yrityksen on pakko ottaa käyttöön uusia tuotantotiloja, mikä puolestaan lisää lämmitys-, vuokra-, vakuutus-, vartiointi-, siivous-, ym. kustannuksia.

Miten suuri pitää valmistusmäärän olla, jotta voitto olisi vähintään 10% myynnistä?

Jaamme tarkastelun kolmeen osaan:

Tapaus 1 ($x \leq 9\,000$)

$$\text{voitto} \geq 0.1 \cdot \text{myynti}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (18.35 - 15.50)\text{€/kpl} - 8\,500\text{€/kk} \geq 0.1 \cdot x \cdot 18.35\text{€/kpl}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot 1.015\text{€/kpl} \geq 8\,500\text{€/kk} \quad | : 1.015\text{€/kpl}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 8\,375\text{kpl/kk}$$

$$\longrightarrow [8\,375; 9\,000] \subset R_j$$

Tapaus 2 ($9\,000 < x \leq 12\,000$)

$$\text{voitto} \geq 0.1 \cdot \text{myynti}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (18.35 - 15.50)\text{€}/\text{kpl} - 10\,500\text{€}/\text{kk} \geq 0.1 \cdot x \cdot 18.35\text{€}/\text{kpl}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot 1.015\text{€}/\text{kpl} \geq 10\,500\text{€}/\text{kk} \quad | : 1.015\text{€}/\text{kpl}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 10\,345\text{kpl}/\text{kk}$$

$$\longrightarrow [10\,345; 12\,000] \subset R_j$$

Tapaus 3 ($12\,000 < x$)

$$\text{voitto} \geq 0.1 \cdot \text{myynti}$$

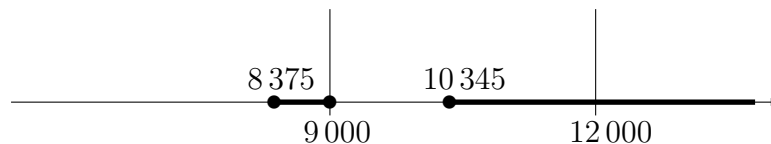
$$\Leftrightarrow x \cdot (18.35 - 14.75)\text{€}/\text{kpl} - 10\,500\text{€}/\text{kk} \geq 0.1 \cdot x \cdot 18.35\text{€}/\text{kpl}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot 1.765\text{€}/\text{kpl} \geq 10\,500\text{€}/\text{kk} \quad | : 1.765\text{€}/\text{kpl}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 5\,949\text{kpl}/\text{kk}$$

$$\longrightarrow]12\,000; \infty[\subset R_j$$

Lukusuoralla ratkaisujoukko näyttää seuraavalta:



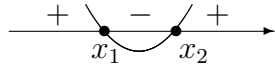
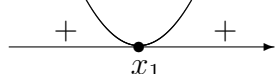
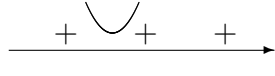
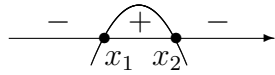
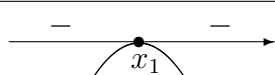

Vastaus: Voitto on vähintään kymmenen prosenttia myynnistä jos valmistusmäärä kuukaudessa x toteuttaa ehdon

$$8\,375 \leq x \leq 9\,000 \quad \text{tai} \quad x \geq 10\,345.$$

2.5.6 II asteen epäyhtälö

Seuraavassa sanomme, että epäyhtälön vasen puoli on LHS (Left Hand Side) ja epäyhtälön oikea puoli on RHS (Right Hand Side). Pienen tovin saa #-merkki edustaa kaikkia erisuuruusmerkkejä $\leq, <, >, \geq, \neq$. Tällä halutaan nyt korostaa sitä, että erisuuruusmerkin tyyppi astuu kuvaan vasta aivan algoritmin loppuvaiheessa.

Table 2.1: Toisen asteen epäyhtälön LHS:n merkkikaavio.

par. aukeamissuunta	juuret	merkkikaavio
$a > 0 \rightarrow$ ylöspäin	$D > 0 \rightarrow x_1$ ja x_2	
$a > 0 \rightarrow$ ylöspäin	$D = 0 \rightarrow x_1$	
$a > 0 \rightarrow$ ylöspäin	$D = 0 \rightarrow R_j = \emptyset$	
$a < 0 \rightarrow$ alaspäin	$D > 0 \rightarrow x_1$ ja x_2	
$a < 0 \rightarrow$ alaspäin	$D = 0 \rightarrow x_1$	
$a > 0 \rightarrow$ alaspäin	$D = 0 \rightarrow R_j = \emptyset$	

Toisen asteen epäyhtälön normaalimuoto on $ax^2 + bx + c \neq 0$. Toisin sanoen normaalimuodon LHS on toisen asteen polynomi ja RHS on nolla.

Toisen asteen epäyhtälön ratkaisualgoritmi voidaan tiivistää seuraaviin askeliin:

- (1) vie epäyhtälö normaalimuotoon,
- (2) ratkaise LHS:n nollakohdat,
- (3) muodosta LHS:n merkkikaavio,
- (4) päätele ratkaisujoukko merkkikaavion ja \neq :n perusteella.

Laadimme kohdassa (3) mainitun merkkikaavion siten, että hahmottelemme x -akselin päälle paraabelin $y = \text{LHS}$, joka leikkaa x -akselia LHS:n nollakohdissa. Merkkikaavion muoto riippuu nyt kertoimesta a , joka määrää paraabelin aukeamissuunnan ja diskriminantista $D = b^2 - 4ac$, joka määrää paraabelin ja x -akselin leikkauspisteiden lukumäärän. Eri vaihtoehdot on esitetty taulukossa 2.1.

Esimerkki 17 Ratkaise epäyhtälö $(x + 1)x \geq 5 - 3x^2$.

Viedään ensin epäyhtälö normaalimuotoon:

$$(x + 1)x \geq 5 - 3x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x \geq 5 - 3x^2$$

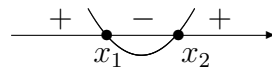
$$\Leftrightarrow \underbrace{4x^2 + x - 5}_{=\text{LHS}} \geq 0$$

Toisen asteen termin kerroin $a = 4 > 0$, joten paraabeli aukeaa ylöspäin. Diskriminantti on $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5) = 81 > 0$, joten juuria on kaksi.

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} = -1.25 \quad \text{ja}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} = 1$$

Merkkikaaviosta



näemme, että

$$\text{LHS} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -1.25 \quad \text{tai} \quad x \geq 1$$

Esimerkki 18 Tarkastellaan uudelleen esimerkin (15) yritystä. Yritys valmistaa tuotetta kuukaudessa määrän x (kpl/kk). Tuotteen myyntihinta on

$$p = 25.00\text{€}/\text{kpl} - 0.00133 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x.$$

Jokaisen tuotteen valmistaminen aiheuttaa muuttuvia valmistuskustannuksia 15.50€.

Kiinteät kustannukset ovat 8 500€/kk.

Miten suuri pitää valmistusmäärän olla, jotta voitto olisi vähintään 10% myynnistä?

Kirjoitetaan vastaava epäyhtälö, kun tuotantomäärä on x .

$$\text{voitto} \geq 0.1 \cdot \text{myynti}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (p - 15.50\text{€}/\text{kpl}) - 8\,500\text{€}/\text{kk} \geq 0.1 \cdot x \cdot p$$

$$\Leftrightarrow 0.9 \cdot x \cdot p - 15.50\text{€}/\text{kpl} \cdot x - 8\,500\text{€}/\text{kk} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0.9 \cdot x \cdot (25.00\text{€}/\text{kpl} - 0.00133 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x) - 15.50\text{€}/\text{kpl} \cdot x - 8\,500\text{€}/\text{kk} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -0.001197 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x^2 + 7.00\text{€}/\text{kpl} \cdot x - 8\,500\text{€}/\text{kk} \geq 0$$

Koska toisen asteen termin kerroin on negatiivinen on LHS:n kuvaaja alaspäin aukeava paraabeli, ja ratkaisujoukkoon kuuluvat yhtälön LHS = 0 juurten välissä olevat x :n

arvot. Ratkaistaan seuraavaksi nämä juuret

$$\begin{aligned}
 &LHS = 0 \\
 \Leftrightarrow &-0.001197 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x^2 + 7.00 \text{€}/\text{kpl} \cdot x - 8\,500 \text{€}/\text{kk} = 0 \\
 \Leftrightarrow &x = \frac{-7.00 \text{€}/\text{kpl} \pm \sqrt{(7.00 \text{€}/\text{kpl})^2 - 4 \cdot (-0.001197 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2}) \cdot (-8\,500 \text{€}/\text{kk})}}{2 \cdot \left(-0.001197 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2}\right)} \\
 \Leftrightarrow &x = \left(\frac{7.00 \pm \sqrt{8.302}}{0.002394} \right) \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \\
 \Leftrightarrow &x_1 = 1\,720.4 \text{ kpl}/\text{kk} \quad \text{ja} \quad x_2 = 4\,127.5 \text{ kpl}/\text{kk}
 \end{aligned}$$

Vastaus: Jos tuotantomäärä x on välillä $1\,720 \text{ kpl}/\text{kk} \leq x \leq 4\,130 \text{ kpl}/\text{kk}$, niin voitto on vähintään 10% myynnistä.

Kun vastausta vertaa esimerkin (15) vastaukseen, niin ero tuntuu suurelta. Esimerkkien yhteinen lähtökohta on nykyinen tuotannon laajuus $x = 5\,000 \text{ kpl}/\text{kk}$ ja nykyinen hinta $18.50 \text{€}/\text{kpl}$. Esimerkin (15) vastaus merkitsee sitä, että yrityksen tulee kasvattaa tuotantoaan saadakseen voiton haluamakseen, ja edellisen esimerkin mukaan yrityksen tulee pienentää tuotantoaan, jos se haluaa voiton olevan 10% myynnistä. Esimerkkien välinen ero on siinä, että esimerkissä (15) oletetaan tuotteista saatavan sama myyntihinta vaikka tuotantoa kasvatetaan. Tämä ei yleensä ole totta. Esimerkki (18) antaakin todemman kuvan siitä, miten tuotantoa joudutaan mitoittamaan. Joskus tuotantoa supistetaan kannattavuussyistä!

Testitehtäviä: Ratkaise seuraavat toisen asteen epäyhtälöt

- a) $3x^2 - 2x \geq -1$
- b) $x(x + 6) < 7$
- c) $-3x^2 + 2 > 5x$
- d) $(2 - x)(x + 4) < 0$
- e) $(x - 2)(x - 2) > -1$
- f) $x^2 - 2(x + 1) \leq -3$

Vastauksia:

a) $x \leq -1/3$ tai $x \geq 1$ b) $-7 < x < 1$ c) $-2 < x < 1/3$

d) $x \leq 2$ tai $x \geq 4$ e) $R_j = \mathbb{R}$ f) $x = 1$