

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

1. välikoe, (ma 5.5.2014)

Malliratkaisut

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin (myös graafinen laskin on sallittu) ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava). opettaja: Matti Laaksonen

1. a) (1p) Laske todellinen vuosikorko, kun kuukausijakson korkokanta on 0,00417368.
 b) (2p) Saat käyttöösi 20 000€ nyt ja joudut maksamaan kolmen kuukauden kuluttua takaisin 20 500€. Mikä on tähän sopimukseen sisältyvän ”lainan” kuukausikorkokanta ja sen todellinen vuosikorko?
 c) (3p) Määritä tasaerälainan annuiteetti, kun lainan määrä on 25 000 euroa, laina-aika on 2,5 vuotta, lainaa lyhennetään kuukausittain, ja todellinen vuosikorko on 3,25%.

Ratkaisu: a) $(1 + i_{kk})^{12} = 1,00417368^{12} = 1,05125$, joten todellinen vuosikorko on 5,125%.

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad (1 + i_{kk})^3 \cdot 20\,000\text{€} &= 20\,500\text{€} \quad | : 20\,000\text{€} \\
 \Leftrightarrow (1 + i_{kk})^3 &= 1,025 \\
 \Leftrightarrow (1 + i_{kk}) &= 1,025^{1/3} = 1,008264838 \\
 \Leftrightarrow (1 + i_{tod}) &= (1 + i_{kk})^{12} = 1,025^{12/3} = 1,103812891
 \end{aligned}$$

Siis kuukausikorkokanta on $i_{kk} = 0,008264838$ ja todellinen vuosikorko on 10,38%
 c) $n = 30$ ja $(1 + i) = 1,0325^{1/12}$

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} 25\,000\text{€} = \frac{[1,0325^{1/12} - 1]1,0325^{30/12}}{1,0325^{30/12} - 1} \cdot 25\,000\text{€} \\
 &= 868,25\text{€}
 \end{aligned}$$

Vastaus: a) Todellinen vuosikorko on 5,125%, b) kuukausikorkokanta on 0,008264838 ja todellinen vuosikorko on 10,38%, c) tasaerä on 868,25€.

2. Vuodessa raaka-ainevaraston läpi kulkee kappaletavaraa $D = 160\,000$ kpl. Yritys aikoo ulkoistaa raaka-ainetilausten ja raaka-ainevarastojen hoidon. Yritys on saanut tarjoukset kolmelta huolintayritykseltä (H1, H2 ja H3). Yhteenvedo tarjoustien tiedoista on seuraavassa taulukossa.

	tilauserä q (kpl)	Tilaukust. K (€/erä)	Yksikköyllä- pitokust. h (€/kpl/kk)	Tilaukust. (€/vuosi)	Ylläpi- tokust. (€/kk)
H1	sop. mukaan	20.00	0.080	–	–
H2	5 000	50.00	0.050	1 600.00	125.00
H3	10 000	40.00	0.075	640.00	375.00

(Maininta ”sopimuksen mukaan” H1:n tarjouksessa merkitsee sitä, että tilauserä voidaan sopia tilaajan haluamaksi.)

- a) (3p) Määritä optimaalinen tilauserän koko huolintaliikkeen H1 tiedoin ja laske vastaavat tilaus- ja ylläpitokustannukset kahteen viimeiseen sarakkeeseen.
 b) (2p) Tarkista ja tarvittaessa korjaa H2:n ja H3:n osalta tilaus- ja ylläpitokustannukset kahdessa viimeisessä sarakkeessa.
 c) (1p) Mikä tarjous on tilaajalle edullisin?

Ratkaisu: a) Lasketaan ensimmäisen tarjouksen mukainen optimaalinen tilauserä.

$$\begin{aligned} \text{kysyntä } D &= 160\,000 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}} \\ \text{tilauskustannus } K &= 20,00\text{€} \\ \text{yks.ylläpitokustannus } h &= 0,080 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{kk}} = 0,96 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}} \end{aligned}$$

optimaalinen tilauserä on nyt

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20,00\text{€} \cdot 160\,000 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}}{0,96 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}}}} = 2582\text{kpl}$$

Tilauskustannus on silloin

$$\frac{KD}{q_0} = \frac{20,00\text{€} \cdot 160\,000 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}}{2582\text{kpl}} = 1\,239,35 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}},$$

ja ylläpitokustannus on silloin

$$h \cdot \frac{q_0}{2} = 0,080 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{kk}} \cdot \frac{2582\text{kpl}}{2} = 103,28 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$$

Kustannustaulukko täydentyy siis muotoon

	tilauserä q (kpl)	Tilauskust. K (€/erä)	Yksikköyllä- pitokust. h (€/kpl/kk)	Tilauskust. (€/vuosi)	Ylläpi- tokust. (€/kk)
H1	2 582	20.00	0.080	1 239,35	103,28
H2	5 000	50.00	0.050	1 600.00	125.00
H3	10 000	40.00	0.075	640.00	375.00

b) Tarkistetaan H2:n ja H3:n osalta tilauskustannuksen ja ylläpitokustannusten arvot taulukossa

Tarjous H2:

$$\begin{aligned} \frac{KD}{q} &= \frac{50,00\text{€} \cdot 160\,000 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}}{5\,000\text{kpl}} = 1\,600,00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}, \quad \text{OK} \\ h \cdot \frac{q}{2} &= 0,050 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{kk}} \cdot \frac{5\,000\text{kpl}}{2} = 125,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}}, \quad \text{OK} \end{aligned}$$

Tarjous H3:

$$\begin{aligned} \frac{KD}{q} &= \frac{40,00\text{€} \cdot 160\,000 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}}{10\,000\text{kpl}} = 640,00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}, \quad \text{OK} \\ h \cdot \frac{q}{2} &= 0,075 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{kk}} \cdot \frac{10\,000\text{kpl}}{2} = 375,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}}, \quad \text{OK} \end{aligned}$$

c) Valitaan tarjouksista edullisin laskemalla vuotuiset kokonaiskustannukset

$$\begin{aligned} TC_{H1} &= 1\,239,35 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 12 \cdot 103,28 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 2\,478,71 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \\ TC_{H2} &= 1\,600,00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 12 \cdot 125,00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 3\,100,00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \end{aligned}$$

$$TC_{H3} = 640,00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 12 \cdot 375,00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 5\,140,00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}$$

Ensimmäinen tarjous on siis edullisin.

Vastaus: a) Ensimmäisen tarjouksen mukainen optimaalinen tilauserä on 2582kpl, Silloin vuotuinen tilauskustannus on 1239,35€/vuosi ja ylläpitokustannus on 103,28€/kk (= 1239,36€/vuosi)

b) Toisen ja kolmannen tarjouksen kustannukset ovat taulukossa oikein

c) Ensimmäinen tarjous on edullisin, koska siinä vuotuinen kokonaiskustannus on pienin.

3. Yrityksen kysyntäfunktio on $p = 54 - 0.1q$. Suunnittelemme yrityksen tuotantoa (q) kuukausijaksoissa. Rajakustannus on $MC(q) = 30 + 0.2q$ ja kiinteät kustannukset ovat $FC = 50$.

a) (1p) Kirjoita tuottofunktion lauseke $R(q)$.

b) (1p) Kirjoita kustannusfunktion lauseke $C(q)$.

c) (1p) Kirjoita voittofunktion lauseke $P(q)$.

d) (3p) Millä tuotannon q arvolla yritys maksimoi voittonsa. Mikä on yrityksen maksimi-voitto?

Ratkaisu: a)

$$R(q) = q \cdot p = q \cdot (54 - 0.1q) = 54q - 0.1q^2.$$

b)

$$\begin{aligned} MC &= 30 + 0.2q, & \text{ja } FC &= 50 \\ \Rightarrow C(q) &= 30q + 0.1q^2 + 50. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(q) &= R(q) - C(q) = (54q - 0.1q^2) - (30q + 0.1q^2 + 50) \\ &= 24q - 0.2q^2 - 50 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} MC(q) &= MR(q) \\ \Leftrightarrow 30 + 0.2q &= 54 - 0.2q \\ \Leftrightarrow 0.4q &= 24 \\ \Leftrightarrow q &= 60 \end{aligned}$$

$$\rightarrow P(60) = 24 \cdot 60 - 0,2 \cdot 60^2 - 50 = 670$$

4. a) (3p) Selitä lyhyesti, mitä tarkoittaa y :n jousto x :n suhteen.

b) (3p) Tuotteen kysyntä oli kesäkuussa 700 tuotetta ja hinta oli 25.00€/tuote. Mitkä ovat heinäkuun kysyntä ja hinta, kun hintaa lasketaan 4.0% ja kysynnän hintajousto on -1.80 ?

Ratkaisu: a) y :n jousto x :n suhteen on y :n prosenttimuutos jaettuna x :n prosenttimuutoksella.

b) Kesäkuussa: $p_1 = 25,000\text{€/kpl}$, $q_1 = 700\text{kpl/kk}$.

Heinäkuussa:

$$\begin{aligned} p\text{:n prosenttimuutos} &= -4,0\% \\ q\text{:n prosenttimuutos} &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{x}{-4,0\%} &= -1,80 \\ \Leftrightarrow x &= -1,80 \cdot (-4,0\%) = +7,2\% \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}\text{heinäkuun hinta} &= 0,96 \cdot 25,00\text{€}/\text{kpl} = 24,00\text{€}/\text{kpl} \\ \text{heinäkuun kysyntä} &= 1,072 \cdot 700\text{kpl}/\text{kk} = 750,4\text{kpl}/\text{kk}\end{aligned}$$

Vastaus: Heinäkuun hinta on 24,00€/kpl ja heinäkuun kysyntä on 750,4kpl/kk.