

## Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

### 1. harjoitus, (1a 12.11.2015)

1. Laske seuraavat laskut. Laske kukin lasku ensin käsin kynää ja paperia käyttäen. Anna vastaukset tarkkoina murtolukuina. Laske lasku myös laskimella ilman paperia ja kynää.

$$\text{a) } \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \quad \text{b) } 2 - \frac{3}{5} \quad \text{c) } \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{4}}$$

Ratkaisu:

$$\text{a) } \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

laskimella:  $2 \div 3 + 1 \div 4 = 0,916666667$

$$\text{b) } 2 - \frac{3}{5} = \frac{10}{5} - \frac{3}{5} = \frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4$$

laskimella:  $2 - 3 \div 5 = 1,4$

$$\text{c) } \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{4}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{4}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{7/4}{5/4} = \frac{7}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{5} = 1,4$$

laskimella:  $(1 + 3 \div 4) \div (1 + 1 \div 4) = 1,4$

2. Laske seuraavat laskut. Laske kukin lasku ensin käsin kynää ja paperia käyttäen. Anna vastaukset tarkkoina murtolukuina. Laske lasku myös laskimella ilman paperia ja kynää.

$$\text{a) } 2^3 + 4^2 \quad \text{b) } \frac{2+6}{3} \quad \text{c) } \left(3 - \frac{1}{3}\right) \cdot 2$$

Ratkaisu:

$$\text{a) } 2^3 + 4^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 8 + 16 = 24$$

laskimella:  $2 \wedge 3 + 4 \wedge 2 = 24$

$$\text{b) } \frac{2+6}{3} = \frac{8}{3}$$

laskimella:  $(2 + 6) \div 3 = 2,666666667$

$$\text{c) } \left(3 - \frac{1}{3}\right) \cdot 2 = \left(\frac{9}{3} - \frac{1}{3}\right) \cdot 2 = \left(\frac{8}{3}\right) \cdot 2 = \frac{16}{3}$$

laskimella:  $(3 - 1 \div 3) \times 2 = 5,333333333$

3. Miten paljon on 17,2% luvusta 325,25?

Ratkaisu:

$$\frac{17,2}{100} \cdot 325,10 = 55,9172 \approx 55,9$$

4. Miten monta prosenttia 20,32 on luvusta 310,10?

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \frac{p}{100} \cdot 310,10 &= 20,32 \\ \Leftrightarrow p &= \frac{100 \cdot 20,32}{310,10} = 6,552724927 \approx 6,553 \end{aligned}$$

Joskus lasketaan

$$\begin{aligned} \frac{p}{100} \cdot 310,10 &= 20,32 \\ \Leftrightarrow \frac{p}{100} &= \frac{20,32}{310,10} = 0,06552724927 \approx 0,06553 \end{aligned}$$

Kummassakin tapauksessa vastaus on: 6,553%.

5. Tuotteen alkuperäinen hinta oli 250,00€. Alennettu hinta on 195,00€. Mikä on alennusprosentti?

Ratkaisu: Alennus on  $250,00\text{€} - 195,00\text{€} = 55,00\text{€}$ . Alennusprosentti on silloin

$$\frac{55,00\text{€}}{250,00\text{€}} \cdot 100\% = 22,00\%$$

6. Ratkaise yhtälöt

$$\text{a) } 2x + 2 = 7x + 8 \quad \text{b) } 6(x + 2) = 5x + 10 \quad \text{c) } 3x + 1 = 3(x + 1)$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad 2x + 2 &= 7x + 8 \\ \Leftrightarrow 2x - 7x &= 8 - 2 \\ \Leftrightarrow -5x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= -6/5 = -1,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \quad 6(x + 2) &= 5x + 10 \\ \Leftrightarrow 6x + 12 &= 5x + 10 \\ \Leftrightarrow 6x - 5x &= 10 - 12 \\ \Leftrightarrow x &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \quad 3x + 1 &= 3(x + 1) \\ \Leftrightarrow 3x + 1 &= 3x + 3 \\ \Leftrightarrow 3x - 3x &= 3 - 1 \\ \Leftrightarrow 0 &= 2 \quad \text{epätosi} \rightarrow \text{Ratkaisujoukko on tyhjä} \end{aligned}$$

Vastaus: a)  $x = -1,2$  b)  $x = -2$  c)  $R_j = \emptyset$ .

### 7. Ratkaise yhtälöt

$$\text{a) } 2x^2 + 3x + 1 = 0 \quad \text{b) } 5x^2 + x = 4x^2 - 2x + 4 \quad \text{c) } (x+1)(x-3) = (x+1)$$

Ratkaisu:

$$\text{a) } 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3+1}{4} = \frac{-2}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3-1}{4} = \frac{-4}{4}.$$

Vastaus:  $x = -0,5$  tai  $x = -1,0$

$$\begin{aligned} \text{b) } \quad 5x^2 + x &= 4x^2 - 2x + 4 \\ 5x^2 - 4x^2 + x + 2x - 4 &= 0 \\ x^2 + 3x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2}.$$

Vastaus:  $x = -1,0$  tai  $x = -4,5$

c) Toisen asteen yhtälöllä on korkeintaan kaksi reaalista juurta. Ne löytyvät helposti, sillä yhtälö on tosi, jos  $(x+1) = 0$  tai  $(x-3) = 1$  eli  $x = -1$  tai  $x = 4$ . Siis

Vastaus: a)  $x = -0,5$  tai  $x = -1,0$     b)  $x = -1,0$  tai  $x = -4,5$     c)  $x = -1$  tai  $x = 4$ .

### 8. Ratkaise epäyhtälöt

$$\text{a) } x - 1 \leq 3x + 1 \quad \text{b) } 3(x+1) \geq 5(x-1)$$

Ratkaisu:

$$\text{a) } \quad x - 1 \leq 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x - 3x \leq 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow -2x \leq 2 \quad | :(-2)$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2$$

$$\text{b) } \quad 3(x+1) \geq 5(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3 \geq 5x - 5$$

$$\Leftrightarrow -2x \geq -8 \quad | :(-2)$$

$$\Leftrightarrow x \leq 4$$

9. Yritys myy tammikuussa 256 tuotetta. Yhden tuotteen myyntihinta on 25,20€ ja tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 18,10€ (per tuote). Myyntitulo on  $256 \cdot 25,20e = 6451,20e$ , valmistuskustannus on  $256 \cdot 18,10e = 4633,60e$ . Tuotantolinjan kate on myyntitulo - valmistuskustannus =  $6451,20e - 4633,60e = 1817,60$ . Kate on siis 28,17% myynnistä.

Helmikuussa tuotteita myydään 300 kappaletta. Myyntihinta ei kasva, mutta valmistuskustannukset (per tuote) kasvavat 10,0%.

- Laske helmikuun myyntitulo (koko tuotanto).
- Laske helmikuun valmistuskustannukset (koko tuotanto).
- Laske helmikuun kate (euroina).
- Laske helmikuun kate (prosentteina myynnistä).
- Miten monta prosenttia myyntitulo kasvoi?
- Miten monta prosenttia valmistuskustannukset kasvoivat?
- Miten monta prosenttia kate kasvoi?
- Miten monta prosenttiyksikköä kate kasvoi?

*Ratkaisu:* Yhden tuotteen osalta myyntihinta on tammi ja helmikuussa sama  $p = 25,20\text{€}/\text{kpl}$ .

Yhden tuotteen valmistuskustannus oli tammikuussa  $c_1 = 18,10 \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$  ja helmikuussa  $c_2 = 1,10 \cdot 18,10 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 19,91 \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$

Yhden tuotteen kate oli tammikuussa  $k_1 = p - c_1 = 25,20 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} - 18,10 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 7,10 \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$  ja helmikuussa  $k_2 = p - c_2 = 25,20 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} - 19,91 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 5,29 \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$ .

Yhden tuotteen kate-prosentti oli tammikuussa  $\frac{k_1}{p} \cdot 100\% = \frac{7,10}{25,20} \cdot 100\% = 28,17\%$  ja helmikuussa  $\frac{k_2}{p} \cdot 100\% = \frac{5,29}{25,20} \cdot 100\% = 20,99\%$ .

Yhden tuotteen euro-määräinen kate muuttui

$$\frac{k_2 - k_1}{k_1} \cdot 100\% = \frac{5,29 - 7,10}{7,10} \cdot 100\% = -25,49\%$$

ja yhden tuotteen kate muuttui

$$20,99\% - 28,17\% = -7,18 \text{ prosenttiyksikköä.}$$

Koko tuotannon osalta myyntitulo oli tammikuussa  $R_1 = 256 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 25,20 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 6451,20 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$ , ja helmikuussa  $R_2 = 300 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 25,20 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 7560,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$ .

Koko tuotannon osalta valmistuskustannus oli tammikuussa  $C_1 = 256 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 18,10 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 4633,60 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$ , ja helmikuussa  $C_2 = 300 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 19,91 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 5973,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$ .

Koko tuotannosta euromääräinen kate oli  
 tammikuussa  $K_1 = R_1 - C_1 = 6451,20 \frac{\text{€}}{\text{kk}} - 4633,60 \frac{\text{€}}{\text{kk}} = 1817,60 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$ , ja  
 helmikuussa  $K_2 = R_2 - C_2 = 7560,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}} - 5973,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}} = 1587,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$ .

Koko tuotannon kate-prosentti oli  
 tammikuussa  $\frac{K_1}{R_1} \cdot 100\% = \frac{1817,60}{6451,20} \cdot 100\% = 28,17\%$  ja  
 helmikuussa  $\frac{K_2}{R_2} \cdot 100\% = \frac{1587,00}{7560,00} \cdot 100\% = 20,99\%$ .

Koko tuotannon euro-määräinen kate muuttui

$$\frac{K_2 - K_1}{K_1} \cdot 100\% = \frac{1587,00 - 1817,60}{1817,60} \cdot 100\% = -12,68\%$$

ja koko tuotannon kate muuttui

$$20,99\% - 28,17\% = -7,18 \text{ prosenttiyksikköä.}$$

Vastaukset kysymyksiin:

- a) Helmikuun myyntitulo (koko tuotanto)  $R_2 = 7560,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$   
 b) Helmikuun valmistuskustannukset (koko tuotanto)  $C_2 = 5973,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$ .  
 c) Helmikuun kate (euroina)  $K_2 = V$ .  
 d) Helmikuun kate (prosentteina myynnistä) on 20,99%.  
 e) Myyntitulo kasvoi

$$\frac{R_2 - R_1}{R_1} \cdot 100\% = \frac{7560,00 - 6451,20}{6451,20} \cdot 100\% = 17,19\%.$$

f) Valmistuskustannukset kasvoivat

$$\frac{C_2 - C_1}{C_1} \cdot 100\% = \frac{5973,00 - 4633,60}{4633,60} \cdot 100\% = 28,91\%.$$

g) Kate muuttui

$$\frac{K_2 - K_1}{K_1} \cdot 100\% = \frac{1587,00 - 1817,60}{1817,60} \cdot 100\% = -12,68\%$$

h) Kate muuttui

$$20,99\% - 28,17\% = -7,18 \text{ prosenttiyksikköä.}$$

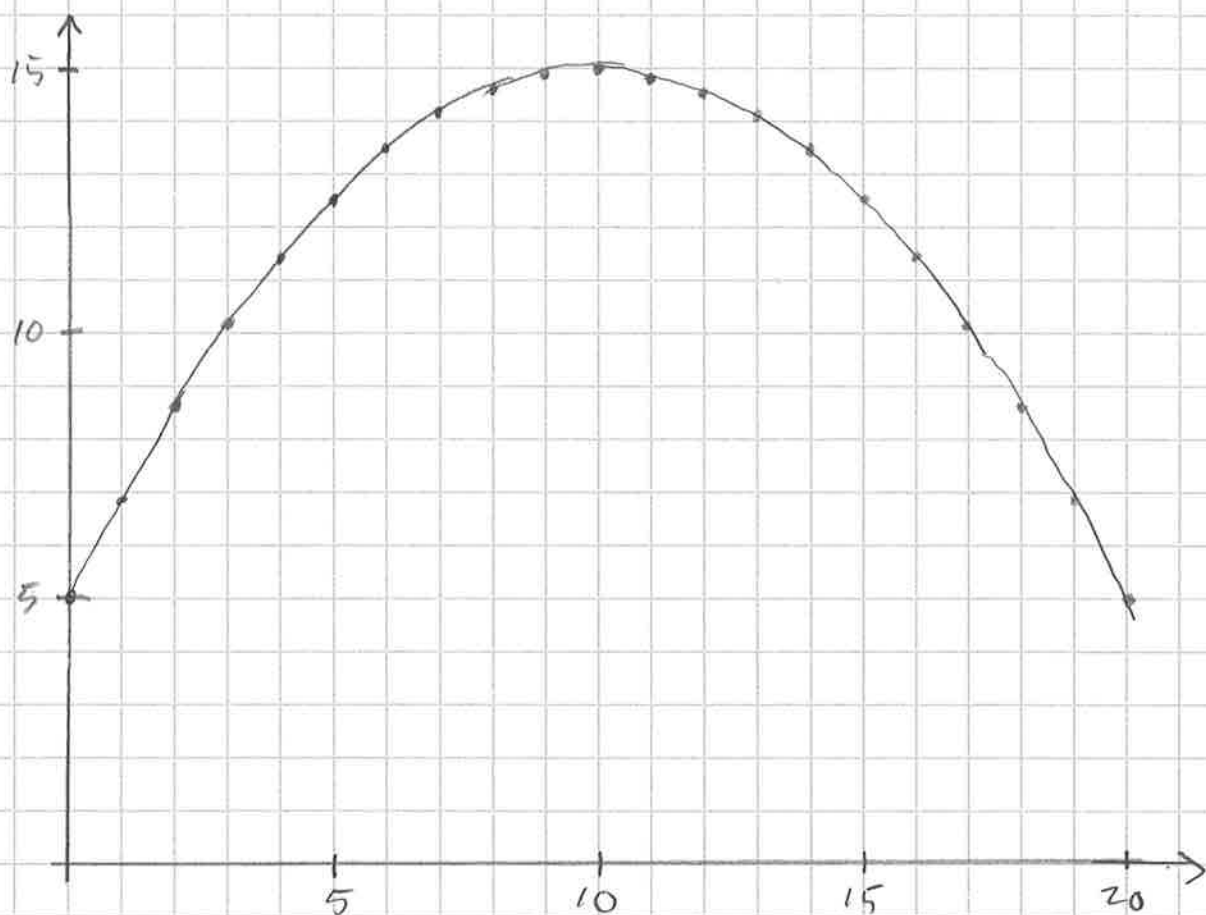
**10.** Piirrä funktion  $f(x) = 5 + 2x - 0,1x^2$  kuvaaja. Missä funktio on kasvava ja missä se on vähenevä? (Ohje: Piirrä kuvaaja välille  $0 \leq x \leq 20$ .)

*Ratkaisu:* Lasketaan ensin funktion arvoja pisteissä  $x = 0, 1, 2, \dots, 20$ .

$x$	$y = f(x) = 5 + 2x - 0,1x^2$	$(x; y)$	$x$	$y = f(x) = 5 + 2x - 0,1x^2$	$(x; y)$
0	$5 + 2 \cdot 0 - 0,1 \cdot 0^2 = 5$	(0; 5,0)	10	$5 + 2 \cdot 10 - 0,1 \cdot 10^2 = 15$	(10; 15,0)
1	$5 + 2 \cdot 1 - 0,1 \cdot 1^2 = 7,1$	(1; 7,1)	11	$5 + 2 \cdot 11 - 0,1 \cdot 11^2 = 14,9$	(11; 14,9)
2	$5 + 2 \cdot 2 - 0,1 \cdot 2^2 = 8,6$	(2; 8,6)	12	$5 + 2 \cdot 12 - 0,1 \cdot 12^2 = 14,6$	(12; 14,6)
3	$5 + 2 \cdot 3 - 0,1 \cdot 3^2 = 10,1$	(3; 10,1)	13	$5 + 2 \cdot 13 - 0,1 \cdot 13^2 = 14,1$	(13; 14,1)
4	$5 + 2 \cdot 4 - 0,1 \cdot 4^2 = 11,4$	(4; 11,4)	14	$5 + 2 \cdot 14 - 0,1 \cdot 14^2 = 13,4$	(14; 13,4)

10. Piirrä funktion  $f(x) = 5 + 2x - 0,1x^2$  kuvaaja. Missä funktio on kasvava ja missä se on vähenevä? (Ohje: Piirrä kuvaaja välille  $0 \leq x \leq 20$ .)

$x$	$f(x) = 5 + 2 \cdot x - 0,1 \cdot x^2$	$f(x) = 5 + 2 \cdot x - 0,1 \cdot x^2$	
0	$5 + 2 \cdot 0 - 0,1 \cdot 0 = 5,0$	11	$5 + 2 \cdot 11 - 0,1 \cdot 11^2 = 14,9$
1	$5 + 2 \cdot 1 - 0,1 \cdot 1^2 = 6,9$	12	$5 + 2 \cdot 12 - 0,1 \cdot 12^2 = 14,6$
2	$5 + 2 \cdot 2 - 0,1 \cdot 2^2 = 8,6$	13	$5 + 2 \cdot 13 - 0,1 \cdot 13^2 = 14,1$
3	$5 + 2 \cdot 3 - 0,1 \cdot 3^2 = 10,1$	14	$5 + 2 \cdot 14 - 0,1 \cdot 14^2 = 13,4$
4	$5 + 2 \cdot 4 - 0,1 \cdot 4^2 = 11,4$	15	$5 + 2 \cdot 15 - 0,1 \cdot 15^2 = 12,5$
5	$5 + 2 \cdot 5 - 0,1 \cdot 5^2 = 12,5$	16	$5 + 2 \cdot 16 - 0,1 \cdot 16^2 = 11,4$
6	$5 + 2 \cdot 6 - 0,1 \cdot 6^2 = 13,4$	17	$5 + 2 \cdot 17 - 0,1 \cdot 17^2 = 10,1$
7	$5 + 2 \cdot 7 - 0,1 \cdot 7^2 = 14,1$	18	$5 + 2 \cdot 18 - 0,1 \cdot 18^2 = 8,6$
8	$5 + 2 \cdot 8 - 0,1 \cdot 8^2 = 14,6$	19	$5 + 2 \cdot 19 - 0,1 \cdot 19^2 = 6,9$
9	$5 + 2 \cdot 9 - 0,1 \cdot 9^2 = 14,9$	20	$5 + 2 \cdot 20 - 0,1 \cdot 20^2 = 5,0$
10	$5 + 2 \cdot 10 - 0,1 \cdot 10^2 = 15,0$		



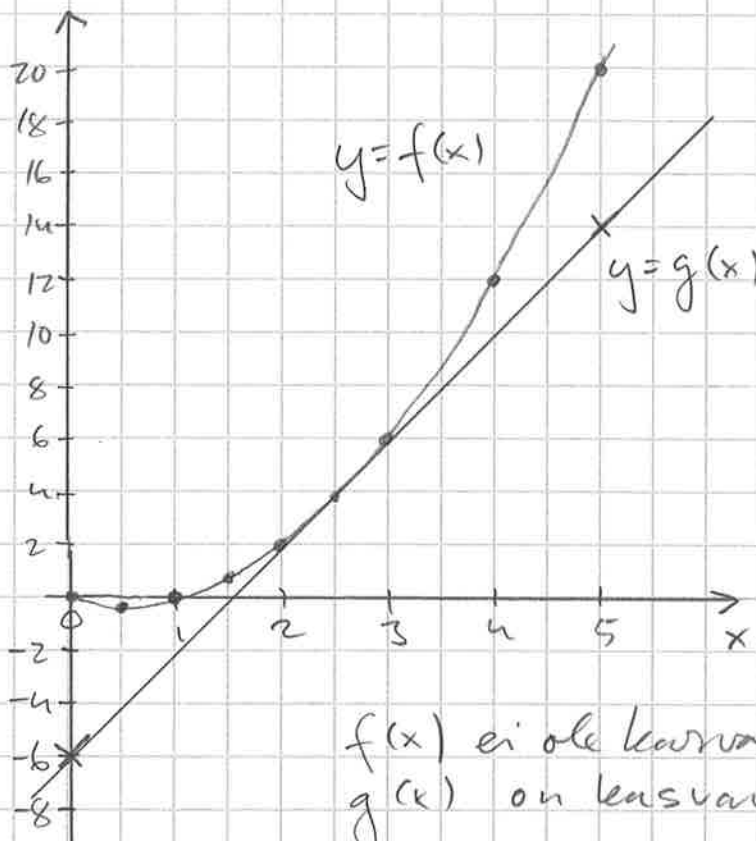
funktio on kasvava, kun  $x < 10$  ja vähenevä, kun  $x > 10$

11. Piirrä välillä  $0 \leq x \leq 5$  kuvaajat funktioille

$$f(x) = x^2 - x, \quad g(x) = 4x - 6$$

$x$	$f(x) = x^2 - x$	$x$	$g(x) = 4x - 6$
0.0	$0^2 - 0 = 0$	0.0	$4 \cdot 0 - 6 = -6$
0.5	$0,5^2 - 0,5 = -0,25$	1.0	
1.0	$1^2 - 1 = 0$	2.0	
2.0	$2^2 - 2 = 2$	3.0	
3.0	$3^2 - 3 = 6$	4.0	
4.0	$4^2 - 4 = 12$	5.0	$4 \cdot 5 - 6 = 14$
5.0	$5^2 - 5 = 20$		
1,5	$1,5^2 - 1,5 = 0,75$		
2,5	$2,5^2 - 2,5 = 3,75$		

12. Ovatko tehtävän 11 funktiot  $f(x)$  ja  $g(x)$  kasvavia välillä  $0 \leq x \leq 5$ ?



### 13. Ratkaise

a)  $1.05^x = 1.50$       b)  $(1.05)^x \geq (1.15)^3$

a)  $1.05^x = 1.50$   
 $\Leftrightarrow \ln(1.05^x) = \ln(1.50)$   
 $\Leftrightarrow x \ln 1.05 = \ln 1.50$   
 $x = \frac{\ln 1.50}{\ln 1.05} = 8,310386229$   
 $\approx \underline{8,31}$

b)  $1.05^x \geq 1.15$        $\left| \Leftrightarrow \ln z \text{ on kasvava}$   
 $\Leftrightarrow \ln(1.05^x) \geq \ln 1.15$   
 $\Leftrightarrow x \ln 1.05 \geq \ln 1.15$   
 $\Leftrightarrow x \geq \frac{\ln 1.15}{\ln 1.05} = 2,864551591$   
 $\approx 2,86$   
 $\Leftrightarrow x \geq 2,86$

Vastaus: a)  $x = 8,31$       b)  $x \geq 2,86$

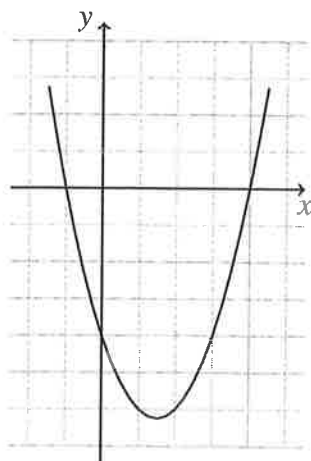
### 14. Ratkaise yhtälöt

a)  $\log_2 16 = x$ ,      b)  $\log_x 100 = 2$ ,      c)  $\log_9 x = 1/2$

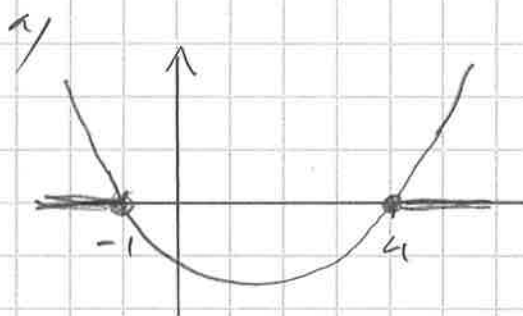
<p>a) <math>\log_2 16 = x</math>  <math>\Leftrightarrow 2^x = 16</math>  <math>\Leftrightarrow \underline{x = 4}</math></p>	<p>b) <math>\log_x 100 = 2</math>  <math>\Leftrightarrow x^2 = 100</math>  <math>\Leftrightarrow \underline{x = 10}</math></p>	<p>c) <math>\log_9 x = \frac{1}{2}</math>  <math>\Leftrightarrow 9^{1/2} = x</math>  <math>\Leftrightarrow \underline{x = \sqrt{9} = 3}</math></p>
---	--	--

15. Alla olevaan kuvaan on piirretty funktion  $f(x) = x^2 - 3x - 4$  kuvaaja. Ratkaise kuvaajan avulla epäyhtälöt

- a)  $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ ,    b)  $x^2 - 3x - 4 < 0$ ,    c)  $x^2 - 3x - 4 \neq -4$

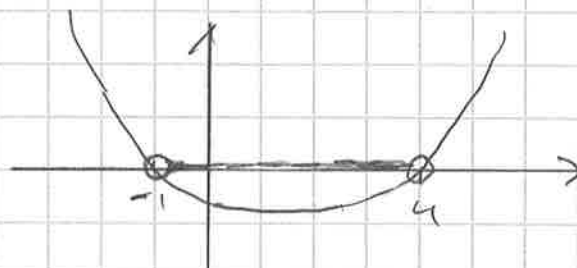


$$f(x) = x^2 - 3x - 4$$



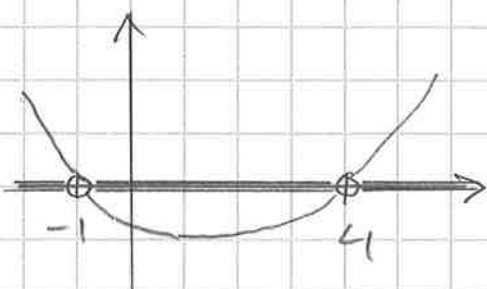
$$f(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq -1 \text{ tai } x \geq 4$$



$$f(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 4$$



$$f(x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq -1 \text{ ja } x \neq 4$$