

## Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

### 2. harjoitus, (pe 27.11.2015)

1. Yritys valmistaa kappaletavaraa  $q$  kappaletta viikossa. Yhden kappaleen materiaali- ja palkkakustannus on 7 €, joten tuotannon määrästä riippuvat muuttuvat kustannukset ovat  $VC = 7q$  (€ viikossa). Yrityksen kiinteät kustannukset ovat  $FC = 11250$  (€ viikossa). Lisäksi ahtaiden tuotantotilojen ja varastointiongelmien takia joudutaan turvautumaan ylityöhön, josta aiheutuu kustannuserä  $LC = 0.005q^2$  (€ viikossa). Kokonaiskustannus viikossa on siis  $TC(q) = FC + VC + LC = 11250 + 7q + 0.005q^2$ . Tuotteen myyntihinta on 30€, joten tuottofunktio on  $TR = 30q$  (€ viikossa) ja voittofunktio on  $P(q) = TR - TC = 23q - 0.005q^2 - 11250$  (€ viikossa). Piirrä voittofunktion  $P(q)$  ja yksikkökustannusfunktion  $AC(q) = TC(q)/q$  kuvaajat kun  $0 < q < 3000$ . Mikä on  $AC(q)$ :n yksikkö? Mikä on mielestäsi järkevä tuotannon määrä?

(Ohje: yksiköt  $[q] = \frac{\text{kpl}}{\text{vko}}$ ,  $[P] = \frac{\text{€}}{\text{vko}}$ ,  $[AC] = \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$ )

2. Laske tehtävässä 1 esiintyneen voittofunktion derivaatta, eli

$$P'(q) = \frac{dP}{dq}.$$

Millä  $q$ :n arvolla  $P'(q) = 0$ ? Tarkista tehtävän 1 kuvan avulla nollakohdan paikka. Millä  $q$ :n arvoilla  $P'(q) \geq 0$ ? Tarkista tämäkin tehtävän 1 kuvan avulla.

3. Laske derivaatat

- a)  $f'(3)$ , kun  $f(x) = x^2 - 4x$ ,
- b)  $g'(x)$ , kun  $g(x) = 7x^2 + 5x - 3$ ,
- c)  $h'(x)$ , kun  $h(x) = 3x \cdot (x^2 - 5)$

4. Erään tuotteen kustannusfunktio on  $C(q) = 0.005q^2 + 6q + 200$ . a) Määritä rajakustannus  $MC(q) = C'(q)$ , yksikkökustannus  $AC(q) = C(q)/q$  ja kiinteät kustannukset  $FC = C(0)$ . b) Minkä arvon edellä mainitut funktiot saavat, kun tuotannon määrä on  $q = 100$ ?

5. Edellisessä tehtävässä mainitun tuotteen kysyntäfunktio

$$p = f(q) = 10 - 0.01q$$

kertoo miten hinta (€/kpl) riippuu tarjolla olevien tuotteiden määrästä (kpl/kk). Tuottofunktio

$$R(q) = qp = q(10 - 0.01q) = 10q - 0.01q^2$$

Kertoo tuoton (myynnistä saatu kassatulo). Laske rajatuotto

$$MR(q) = R'(q)$$

6. Tehtävien 4 ja 5 yritys tuottaa nyt kaksisataa tuotetta kuussa ( $q = 200$ ). Laske rajakustannus  $MC(200)$  ja rajatuotto  $MR(200)$ . Kannattaako yrityksen kasvattaa vai pienentää tuotantoaan?

7. Yrityksen erään tuotelinjan kysyntäfunktio on  $p = 20 - 0.030q$  ja vastaava kustannusfunktio on  $C(q) = 0.02q^2 + 5q + 150$ . Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen. Mikä on maksimivoitto?

# Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

## 2. harjoitus, (pe 27.11.2015)

1. Yritys valmistaa kappaletavaraa  $q$  kappaletta viikossa. Yhden kappaleen materiaali- ja palkkakustannus on 7 €, joten tuotannon määrästä riippuvat muuttuvat kustannukset ovat  $VC = 7q$  (€ viikossa). Yrityksen kiinteät kustannukset ovat  $FC = 11250$  (€ viikossa). Lisäksi ahtaiden tuotantotilojen ja varastointiongelmien takia joudutaan turvautumaan yli-työhön, josta aiheutuu kustannuserä  $LC = 0.005q^2$  (€ viikossa). Kokonaiskustannus viikossa on siis  $TC(q) = FC + VC + LC = 11250 + 7q + 0.005q^2$ . Tuotteen myyntihinta on 30€, joten tuottofunktio on  $TR = 30q$  (€ viikossa) ja voittofunktio on  $P(q) = TR - TC = 23q - 0.005q^2 - 11250$  (€ viikossa). Piirrä voittofunktion  $P(q)$  ja yksikkökustannusfunktion  $AC(q) = TC(q)/q$  kuvaajat kun  $0 < q < 3000$ . Mikä on  $AC(q)$ :n yksikkö? Mikä on mielestäsi järkevä tuotannon määrä?

(Ohje: yksiköt  $[q] = \frac{\text{kpl}}{\text{vko}}$ ,  $[P] = \frac{\text{€}}{\text{vko}}$ ,  $[AC] = \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$ )

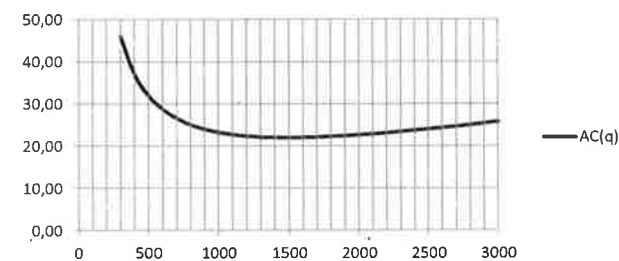
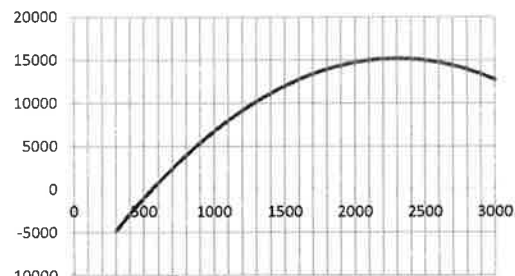
$$TR(q) = 30q$$

$$TC(q) = 11250 + 7q + 0,005q^2$$

$$P(q) = TR(q) - TC(q) = 23q - 0,005q^2 - 11250$$

$$AC(q) = \frac{TC(q)}{q} = \frac{11250 + 7q + 0,005q^2}{q} = \frac{11250}{q} + 7 + 0,005q$$

q	P(q)	AC(q)
300	-4800	46,00
400	-2850	37,13
500	-1000	32,00
600	750	28,75
700	2400	26,57
800	3950	25,06
900	5400	24,00
1000	6750	23,25
1100	8000	22,73
1200	9150	22,38
1300	10200	22,15
1400	11150	22,04
1500	12000	22,00
1600	12750	22,03
1700	13400	22,12
1800	13950	22,25
1900	14400	22,42
2000	14750	22,63
2100	15000	22,86
2200	15150	23,11
2300	15200	23,39
2400	15150	23,69
2500	15000	24,00
2600	14750	24,33
2700	14400	24,67
2800	13950	25,02
2900	13400	25,38
3000	12750	25,75



2. Laske tehtävässä 1 esiintyneen voittofunktion derivaatta, eli

$$P'(q) = \frac{dP}{dq}$$

Millä  $q$ :n arvolla  $P'(q) = 0$ ? Tarkista tehtävän 1 kuvan avulla nollakohdan paikka. Millä  $q$ :n arvoilla  $P'(q) \geq 0$ ? Tarkista tämäkin tehtävän 1 kuvan avulla.

$$P(q) = 23q - 0,005q^2 - 11250$$

$$P'(q) = 23 - 0,01q$$

$$\begin{aligned} P'(q) &= 0 \\ \Leftrightarrow 23 - 0,01q &= 0 \\ \Leftrightarrow 23 &= 0,01q \quad | \cdot 100 \\ \Leftrightarrow \underline{2300} &= q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'(q) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 23 - 0,01q &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 23 &\geq 0,01q \quad | \cdot 100 \\ \Leftrightarrow \underline{2300} &\geq q \end{aligned}$$

Sopii yhteen kuvan kanssa

---

$$AC(q) = 11250q^{-1} + 7 + 0,005q$$

$$AC'(q) = -11250q^{-2} + 0,005$$

$$\begin{aligned} AC'(q) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{11250}{q^2} + 0,005 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0,005 = \frac{11250}{q^2}$$

$$\Leftrightarrow q^2 = \frac{11250}{0,005}$$

$$\Leftrightarrow q = \sqrt{\frac{11250}{0,005}}$$

$$\Leftrightarrow q = 1500$$

$$\begin{aligned} AC'(q) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{11250}{q^2} + 0,005 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0,005 \geq \frac{11250}{q^2}$$

$$\Leftrightarrow q^2 \geq \frac{11250}{0,005}$$

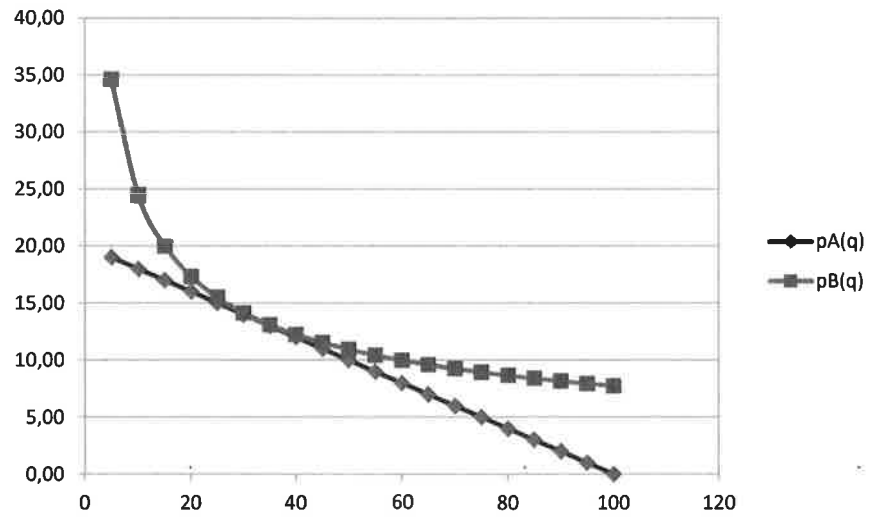
$$\Leftrightarrow q \geq \sqrt{\frac{11250}{0,005}}$$

$$\Leftrightarrow q \geq 1500$$

Sopii yhteen kuvan kanssa

Sheet1

q	pA(q)	pB(q)
0	20,00	
5	19,00	34,6
10	18,00	24,5
15	17,00	20,0
20	16,00	17,3
25	15,00	15,5
30	14,00	14,1
35	13,00	13,1
40	12,00	12,2
45	11,00	11,5
50	10,00	11,0
55	9,00	10,4
60	8,00	10,0
65	7,00	9,6
70	6,00	9,3
75	5,00	8,9
80	4,00	8,7
85	3,00	8,4
90	2,00	8,2
95	1,00	7,9
100	0,00	7,7



### 3. Laske derivaatat

- a)  $f'(3)$ , kun  $f(x) = x^2 - 4x$ ,  
b)  $g'(x)$ , kun  $g(x) = 7x^2 + 5x - 3$ ,  
c)  $h'(x)$ , kun  $h(x) = 3x \cdot (x^2 - 5)$

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 4x \\f'(x) &= 2x - 4 \\f'(3) &= 2 \cdot 3 - 4 = 6 - 4 = \underline{\underline{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(x) &= 7x^2 + 5x - 3 \\g'(x) &= \underline{\underline{14x + 5}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h(x) &= 3x \cdot (x^2 - 5) \\&= 3x^3 - 15x \\h'(x) &= \underline{\underline{9x^2 - 15}}\end{aligned}$$

Vastaus:  $f'(3) = 2$ ,  $g'(x) = 14x + 5$ ,  $h'(x) = 9x^2 - 15$

4. Erään tuotteen kustannusfunktio on  $C(q) = 0.005q^2 + 6q + 200$ . a) Määritä rajakustannus  $MC(q) = C'(q)$ , yksikkökustannus  $AC(q) = C(q)/q$  ja kiinteät kustannukset  $FC = C(0)$ . b) Minkä arvon edellä mainitut funktiot saavat, kun tuotannon määrä on  $q = 100$ ?

$$\begin{aligned}C(q) &= 0,005q^2 + 6q + 200 \\AC(q) &= \frac{C(q)}{q} = \frac{0,005q^2 + 6q + 200}{q} = 0,005q + 6 + \frac{200}{q}\end{aligned}$$

$$MC(q) = C'(q) = 0,01q + 6$$

$$FC = 200$$

$$C(100) = 0,005 \cdot 100^2 + 6 \cdot 100 + 200 = 850$$

$$AC(100) = 0,005 \cdot 100 + 6 + \frac{200}{100} = 8,5$$

$$MC(100) = 0,01 \cdot 100 + 6 = 7$$

5. Edellisessä tehtävässä mainitun tuotteen kysyntäfunktio

$$p = f(q) = 10 - 0.01q$$

kertoo miten hinta (€/kpl) riippuu tarjolla olevien tuotteiden määrästä (kpl/kk). Tuottofunkti

$$R(q) = qp = q(10 - 0.01q) = 10q - 0.01q^2$$

Kertoo tuoton (myynnistä saatu kassatulo). Laske rajatuotto

$$MR(q) = R'(q)$$

$$p = 10 - 0,01q$$
$$R(q) = q \cdot p = q(10 - 0,01q) = 10q - 0,01q^2$$

$$MR(q) = R'(q) = \frac{d}{dq}(10q - 0,01q^2) = 10 - 0,02q$$

6. Tehtävien 4 ja 5 yritys tuottaa nyt kaksisataa tuotetta kuussa ( $q = 200$ ). Laske rajakustannus  $MC(200)$  ja rajatuotto  $MR(200)$ . Kannattaako yrityksen kasvattaa vai pienentää tuotantoaan?

$$MC(q) = 0,01q + 6$$

$$MC(200) = 0,01 \cdot 200 + 6 = 8$$

$$MR(q) = 10 - 0,02q$$

$$MR(200) = 10 - 0,02 \cdot 200 = 6$$

$MR < MC \rightarrow$  tuotantoa kannattaa supistaa

7. Yrityksen erään tuotelinjan kysyntäfunktio on  $p = 20 - 0.030q$  ja vastaava kustannusfunktio on  $C(q) = 0.02q^2 + 5q + 150$ . Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen. Mikä on maksimivoitto?

$$p = 20 - 0,03q$$
$$R(q) = 20q - 0,03q^2$$
$$MR(q) = 20 - 0,06q$$

$$C(q) = 0,02q^2 + 5q + 150$$
$$MC(q) = 0,04q + 5$$

$$MC = MR$$
$$0,04q + 5 = 20 - 0,06q$$
$$0,1q = 15$$
$$q = 150$$

$$P(150) = R(150) - C(150)$$
$$= (20 \cdot 150 - 0,03 \cdot 150^2) - (0,02 \cdot 150^2 + 5 \cdot 150 + 150)$$
$$= (3000 - 675) - (450 + 750 + 150)$$
$$= 975$$