

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

3. harjoitus, (1a 28.11.2015)

1. Tehdas valmistaa viikossa tuotetta määrän q ja myy sen hintaan p (euroa/tuote). Kysyntä-funktio on $p(q) = 5 - 0.01q$. Tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 1,5 euroa/tuote ja valmistusmäärästä riippumaton kiinteä kustannus on 230 euroa/viikko. Millä valmistusmäärällä yritys saa suurimman voiton?

(voitto=myyntitulo – kustannukset)

2. Tarkastellaan uudelleen tehtävän 2 ongelmaa. Nyt kuitenkin yrityksen tuotantokapasiteetti on 150 tuotetta/viikko. Yritys voi ylittää kapasiteettinsa, jos se teettää kapasiteetin ylittävän osan tuotteista ylityönä. Ylityönä tehdyn tuotteen valmistuskustannus on 1,6 euroa/tuote. Jos ylityötä tehdään on kiinteä kustannus 250 euroa/viikko. Millä valmistusmäärällä yritys nyt saa suurimman voiton (voitto = myyntitulo – kustannukset)?

3. Tuotteen A kysyntäfunktio on $p_A = 20 - 0.2q_A$ ja tuotteen B kysynnän ja hinnan välistä yhteyttä kuvaa yhtälö $q_B = 6000/p_B^2$.

a) Piirrä kummankin tuotteen kysyntäfunktion kuvaaja muodossa $p = f(q)$.

b) Laske kummankin tuotteen kysynnän hintajousto, kun $q_1 = 20$, $q_2 = 21$.

c) Laske kummankin tuotteen kysynnän hintajousto, kun $q_1 = 80$, $q_2 = 81$.

$$\text{kysynnän hintajousto} = \frac{(q_2 - q_1)}{(p_2 - p_1)} \cdot \frac{p_1}{q_1}, \quad p_1 = f(q_1), p_2 = f(q_2)$$

4. Erään kappaletavaruotteen varaston yksikköylläpitokustannukset ovat 4€ kappaletta ja vuotta kohti. Tilauskustannukset ovat 80€ tilauserältä. Kysyntä on tasaista ja suuruudeltaan 4000 kpl vuodessa. Täydennystoimitukset tapahtuvat ongelmitta, ja varastointitila on rajoittamaton. Puutetta ei sallita. Miten suuri on optimaalinen tilauserän koko ja miten suuret ovat varastonpidon kokonaiskustannukset?

5. Suurpesula tarvitsee 2 500 astiaa tiettyä pesuainetta kuukaudessa. Yksikköylläpitokustannus on 0.5€/astia/vuosi. Tilauskustannukset ovat 75€ tilaukselta. Pesula tilaa ainetta nykyisin 5 000 astian erissä. Miten suureen vuosisäästöön pesulan on mahdollista päästä muuttamalla tilauspolitiikkaansa? Miten tilaukset tällöin tehdään? Onko säästö mielestäsi suuri?

6. Vuodessa raaka-ainevaraston läpi kulkee kappaletavaraa $D = 1600$ kpl. Tilauskustannus on 9€/erä ja varaston ylläpitokustannus on 1.5€/(kuukausi·kpl).

a) Mikä on optimaalinen tilauserän koko, ja miten suuret ovat varastosysteemin vuotuiset kokonaiskustannukset ?

b) Raaka-aineen yksikköhinta on 5€/kpl. Raaka-aineen toimittaja tarjoaa määräalennusta, joka on 1% ostohinnasta, kun tilauserä on vähintään 50 kappaletta, ja 3% ostohinnasta, kun tilauserä on vähintään 100 kappaletta. Mikä on nyt optimaalinen tilauserä?

Kaavoja:

Kysynnän hintajousto:

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \eta$$

Varastomallit:

perusmalli $q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$
 $TC_0(q) = \frac{KD}{q} + h \cdot \frac{q}{2}$

puutemalli $q_1 = q_0 \sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0 \sqrt{\frac{s}{h+s}},$
 $TC_1(q) = \frac{KD}{q} + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q}$

tuotantomalli $q_2 = q_0 \sqrt{\frac{r}{r-D}}, \quad M_2 = q_0 \sqrt{\frac{r-D}{r}},$
 $TC_2(q) = \frac{KD}{q} + \frac{hq(r-D)}{2r}$

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

3. harjoitus, (la 28.11.2015)

1. Tehdas valmistaa viikossa tuotetta määrän q ja myy sen hintaan p (euroa/tuote). Kysyntä-funktio on $p(q) = 5 - 0.01q$. Tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 1,5 euroa/tuote ja valmistusmäärästä riippumaton kiinteä kustannus on 230 euroa/viikko. Millä valmistusmäärällä yritys saa suurimman voiton?
(voitto = myyntitulo - kustannukset)

$$p = 5 - 0,01q$$

$$R = 5q - 0,01q^2$$

$$MR = 5 - 0,02q$$

$$C = 1,5q + 230$$

$$MC = 1,5$$

$$MC = MR$$

$$\Rightarrow 1,5 = 5 - 0,02q$$

$$0,02q = 3,5 \quad | \cdot 50$$

$$q = \underline{\underline{175}}$$

Voittoa: voitto on suurin kun valmistetaan 175 tuotetta viikossa

2. Tarkastellaan uudelleen tehtävän 1 ongelmaa. Nyt kuitenkin yrityksen tuotantokapasiteetti on 150 tuotetta/viikko. Yritys voi ylittää kapasiteettinsa, jos se teettää kapasiteetin ylittävän osan tuotteista ylityönä. Ylityönä tehdyn tuotteen valmistuskustannus on 1,6 euroa/tuote. Jos ylityötä tehdään on kiinteä kustannus 250 euroa/viikko. Millä valmistusmäärällä yritys nyt saa suurimman voiton (voitto = myyntitulo - kustannukset)?

$$R = 5q - 0,01q^2$$

$$C(q) = \begin{cases} 1,5q + 230 & , \text{ kun } q \leq 150 \\ 1,5 \cdot 150 + 1,6 \cdot (q - 150) + 250 & , \text{ kun } q > 150 \end{cases}$$

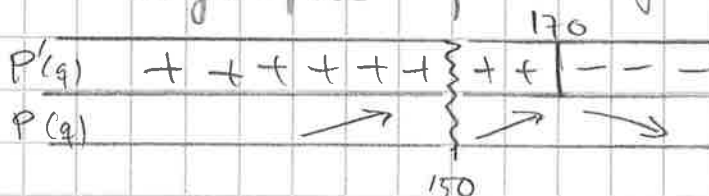
$$= \begin{cases} 1,5q + 230 & , q \leq 150 \\ 1,6q + 235 & , q > 150 \end{cases}$$

$$P(q) = \begin{cases} 5q - 0,01q^2 - (1,5q + 230) = 3,5q - 0,01q^2 - 230 & , q \leq 150 \\ 5q - 0,01q^2 - (1,6q + 235) = 3,4q - 0,01q^2 - 235 & , q > 150 \end{cases}$$

$$P'(q) = \begin{cases} 3,5 - 0,02q, & q < 150 \\ 3,4 - 0,02q, & q > 150 \end{cases}$$

ei ylityötä | tehdään ylity.

ei ylity. optimi $q = 150$
tehd. yl. optimi $q = 170$



$$P(150) = 3,5 \cdot 150 - 0,01 \cdot 150^2 - 230 = 70$$

$$P(170) = 3,4 \cdot 170 - 0,01 \cdot 170^2 - 235 = 54$$

Optimi: $q_{opt} = 150$

3. Tuotteen A kysyntäfunktio on $p_A = 20 - 0.2q_A$ ja tuotteen B kysynnän ja hinnan välistä yhteyttä kuvaa yhtälö $q_B = 6000/p_B^2$.

a) Piirrä kummankin tuotteen kysyntäfunktion kuvaaja muodossa $p = f(q)$.

b) Laske kummankin tuotteen kysynnän hintajousto, kun $q_1 = 20$, $q_2 = 21$.

c) Laske kummankin tuotteen kysynnän hintajousto, kun $q_1 = 80$, $q_2 = 81$.

$$\text{kysynnän hintajousto} = \frac{(q_2 - q_1)}{(p_2 - p_1)} \cdot \frac{p_1}{q_1}, \quad p_1 = f(q_1), p_2 = f(q_2)$$

$$q_B = \frac{6000}{p_B^2}$$

$$\Leftrightarrow p_B^2 = \frac{6000}{q_B}$$

$$\Leftrightarrow p_B = \sqrt{\frac{6000}{q_B}}$$

a) kuva seuraavalle sivulle

$$\begin{array}{l|l} q_1 = 20, & p_A(20) = 20 - 0,2 \cdot 20 = 16,00 \\ q_2 = 21, & p_A(21) = 20 - 0,2 \cdot 21 = 15,80 \\ & p_2 - p_1 = 15,80 - 16,00 = -0,20 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} p_B(20) = \sqrt{\frac{6000}{20}} = 17,320508 \\ p_B(21) = \sqrt{\frac{6000}{21}} = 16,903085 \\ p_2 - p_1 = 16,90 - 17,32 = \\ -0,417423 \end{array} \right.$$

$$khj_A(20) = \frac{q_2 - q_1}{p_A - p_2} \cdot \frac{p_A}{q_1} = \frac{1}{-0,20} \cdot \frac{16}{20} = -4$$

$$khj_B(20) = \frac{1}{-0,417423} \cdot \frac{17,320508}{20} = -2,07$$

$$\begin{array}{l|l} q_1 = 80, & p_A(80) = 20 - 0,2 \cdot 80 = 4,00 \\ q_2 = 81, & p_A(81) = 20 - 0,2 \cdot 81 = 3,80 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} p_B(80) = \sqrt{\frac{6000}{80}} = 8,660254 \\ p_B(81) = \sqrt{\frac{6000}{81}} = 8,606630 \end{array} \right.$$

$$khj_A(80) = \frac{1}{-0,20} \cdot \frac{4}{80} = -0,25$$

$$khj_B(80) = \frac{1}{-0,053624} \cdot \frac{8,66025}{80} = -2,02$$

4. Erään kappaletavaratuotteen varaston yksikköylläpitokustannukset ovat 4€ kappaletta ja vuotta kohti. Tilaukustannukset ovat 80€ tilauserältä. Kysyntä on tasaista ja suuruudeltaan 4000 kpl vuodessa. Täydennystoimitukset tapahtuvat ongelmitta, ja varastointitila on rajoittamaton. Puutetta ei sallita. Miten suuri on optimaalinen tilauserän koko ja miten suuret ovat varastonpidon kokonaiskustannukset?

$$h = 4 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}}, \quad K = 80 \text{ €}, \quad D = 4000 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \text{ €} \cdot 4000 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}}{4 \text{ €} / \text{kpl} / \text{vuosi}}}$$

$$= \underline{400 \text{ kpl}}$$

$$TC = \frac{KD}{q} + h \cdot \frac{q}{2} = \frac{80 \text{ €} \cdot 4000 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}}{400 \text{ kpl}} + 4 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{400 \text{ kpl}}{2}$$

$$= 800 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 800 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}$$

$$= \underline{1600 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}}$$

Vastaus: optimaalinen tilauserän koko on 400 kpl. Silloin kokonaiskustannus on 1600 € vuodesta

Vertailua

q	TC = $\frac{KD}{q} + h \cdot \frac{q}{2}$
500	$\frac{80 \cdot 4000}{500} + 4 \cdot \frac{500}{2} = 1640,00$
600	$\frac{80 \cdot 4000}{600} + 4 \cdot \frac{600}{2} = 1733,33$
800	$\frac{80 \cdot 4000}{800} + 4 \cdot \frac{800}{2} = 2000,00$
300	$\frac{80 \cdot 4000}{300} + 4 \cdot \frac{300}{2} = 1666,67$
200	$\frac{80 \cdot 4000}{200} + 4 \cdot \frac{200}{2} = 2000,00$

5. Suurpesula tarvitsee 2 500 astiaa tiettyä pesuainetta kuukaudessa. Yksikköylläpitokustannus on 0.5€/astia/vuosi. Tilauskustannukset ovat 75€ tilaukselta. Pesula tilaa ainetta nykyisin 5 000 astian erissä. Miten suureen vuosisäästöön pesulan on mahdollista päästä muuttamalla tilauspolitiikkaansa? Miten tilaukset tällöin tehdään? Onko säästö mielestäsi suuri?

$$D = 2500 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} = 12 \cdot 2500 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}$$

$$h = 0,5 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}} \quad K = 75 \text{€}$$

Kokonaiskustannus

$$TC = \frac{KD}{q} + h \frac{q}{2}$$

$$= \frac{75 \text{€} \cdot 12 \cdot 2500 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}}{5000 \text{ kpl}} + 0,5 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}} \frac{5000 \text{ kpl}}{2}$$

$$= 450 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 1250 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = \underline{1700 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}}$$

Optimi

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 75 \cdot 12 \cdot 2500}{0,5}} \text{ kpl} = 3000 \text{ kpl}$$

$$TC_0 = \frac{KD}{3000 \text{ kpl}} + h \cdot \frac{3000 \text{ kpl}}{2}$$

$$= \frac{75 \text{€} \cdot 12 \cdot 2500 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}}{3000 \text{ kpl}} + 0,5 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}} \frac{3000 \text{ kpl}}{2}$$

$$= 750 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 750 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = \underline{1500 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}}$$

Vaikutus: Pesula säästää 200 €/vuosi, jos se tilaa 3000 astian erissä
(Säästö noin $\frac{200}{1700} \cdot 100\% \approx 12\%$)

6. Vuodessa raaka-ainevaramon läpi kulkee kappaletavaraa $D = 1600$ kpl. Tilaukustannus on 9€ /erä ja varaston ylläpitokustannus on $1.5\text{€}/(\text{kuukausi} \cdot \text{kpl})$.

a) Mikä on optimaalinen tilauserän koko, ja miten suuret ovat varastosysteemin vuotuiset kokonaiskustannukset?

b) Raaka-aineen yksikköhinta on $5\text{€}/\text{kpl}$. Raaka-aineen toimittaja tarjoaa määräalennusta, joka on 1% ostohinnasta, kun tilauserä on vähintään 50 kappaletta, ja 3% ostohinnasta, kun tilauserä on vähintään 100 kappaletta. Mikä on nyt optimaalinen tilauserä?

$$a) D = 1600 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}, \quad K = 9\text{€}, \quad h = 1,5 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{kk}} = 18 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}}$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 1600}{18}} \text{ kpl} = \underline{\underline{40 \text{ kpl}}}$$

$$TC_0 = \frac{KD}{q_0} + h \frac{q_0}{2} = \left(\frac{9 \cdot 1600}{40} + 18 \cdot \frac{40}{2} \right) \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}$$

$$= 360 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 360 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = \underline{\underline{720 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}}}$$

$$b) p_0 = 5 \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$$

q	p	$TC = \frac{KD}{q} + h \frac{q}{2} + pD$
40	5,00 €	$\frac{9 \cdot 1600}{40} + 18 \cdot \frac{40}{2} + 5 \cdot 1600 = 360 + 360 + 8000 = 8720$
50	4,95 €	$\frac{9 \cdot 1600}{50} + 18 \cdot \frac{50}{2} + 4,95 \cdot 1600 = 288 + 450 + 7920 = \underline{\underline{8658}}$
100	4,85 €	$\frac{9 \cdot 1600}{100} + 18 \cdot \frac{100}{2} + 4,85 \cdot 1600 = 144 + 900 + 7760 = 8804$

Optimaalinen tilauserä on 50 kpl