

## 1. Integroi

a)  $\int (6x^2 + 8x + 2) dx$ , b)  $\int_3^4 (4x - 3) dx$

$$\begin{aligned}
 & a) \\
 & \int (6x^2 + 8x + 2) dx \\
 & = \underline{\underline{2x^3 + 4x^2 + 2x + C}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & f(x) = 6x^2 + 8x + 2 \\
 & F(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x + C \\
 & \int f(x) dx = F(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & b) \\
 & \int_3^4 (4x - 3) dx \\
 & = \frac{1}{3} (2x^2 - 3x) \\
 & = (2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4) - (2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3) \\
 & = (32 - 12) - (18 - 9) \\
 & = 20 - 9 \\
 & = \underline{\underline{11}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_a^b f(x) dx \\
 & = \int_a^b F'(x) dx \\
 & = F(b) - F(a)
 \end{aligned}$$

Huomaa a-kohdan vastaus on  
integraalifunktio  $F(x)$

b-kohdan vastaus on luku  
(määrätty integraali)

2. Ratkaise graafisesti seuraava lp-malli

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{ehdoin} \quad 3x_1 + x_2 &\leq 45 \\ x_1 + x_2 &\leq 18 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

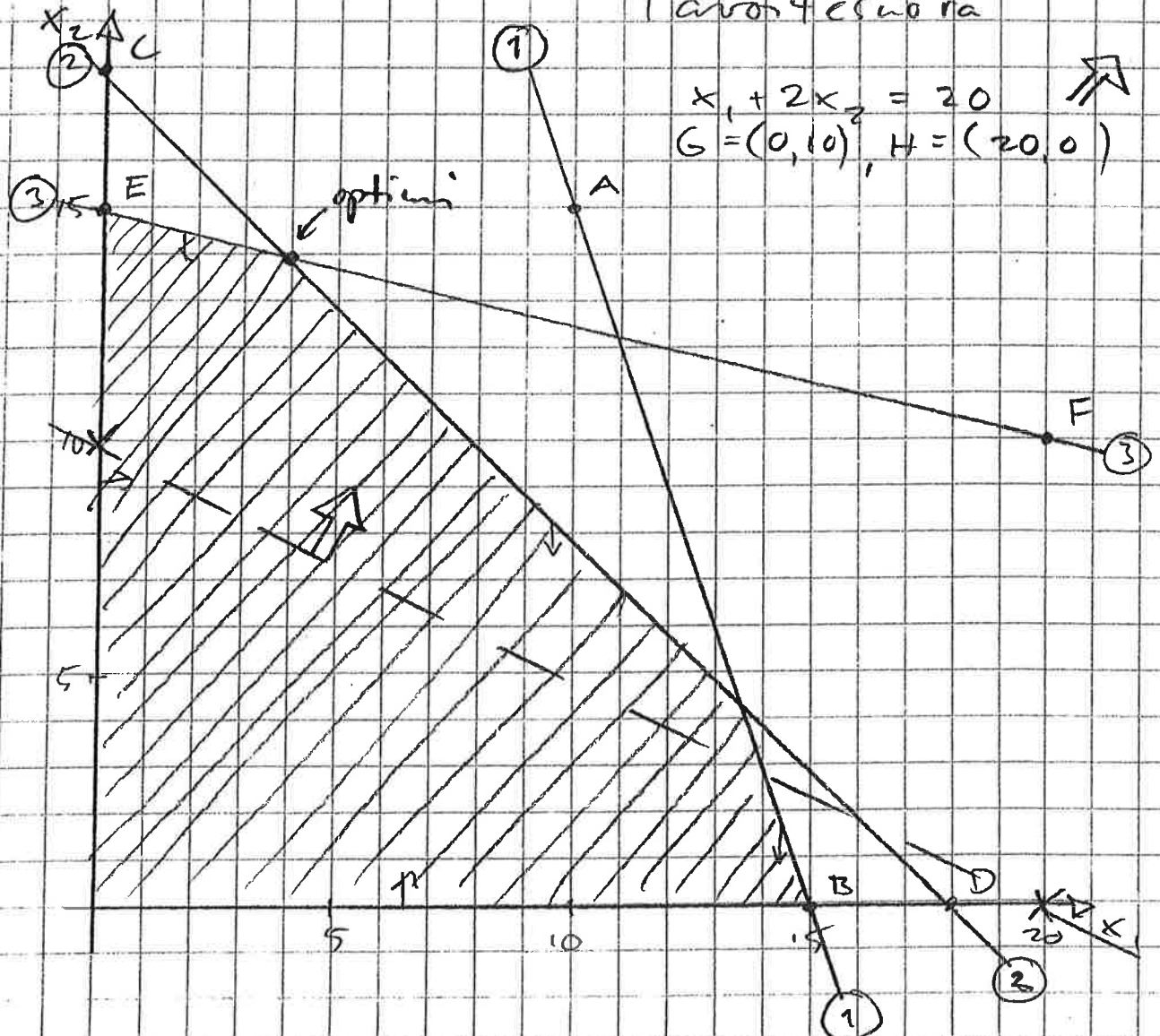
Rajoitteet

- ①  $3x_1 + x_2 \leq 45$  ↓ alapuoli: A=(10,15), B=(15,0)  
 ②  $x_1 + x_2 \leq 18$  ↓ — — — C=(0,18), D=(18,0)  
 ③  $x_1 + 4x_2 \leq 60$  ↓ — — — E=(0,15), F=(20,10)

Tavoitefunktio

$$x_1 + 2x_2 = 20 \quad \nearrow$$

G=(0,10), H=(20,0)



optimissa  $\begin{cases} \textcircled{2} & x_1 + x_2 = 18 \\ \textcircled{3} & x_1 + 4x_2 = 60 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot (-1) \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 18 \\ -x_1 - 4x_2 = -60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 18 \\ 3x_2 = 42 \end{cases}$

$\rightarrow x_2 = 14 \quad \text{ja} \quad x_1 = 4, \quad z = 4 + 2 \cdot 14 = 32$

✓:  $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 14 \\ z = 32 \end{cases}$

3. Pienyritys valmistaa kahta tuotetta 1 ja 2, ja myy kaiken valmistamansa. Kumpaakin tuotetta käsitellään kolmella osastolla seuraavan taulukon mukaisesti.

tuote	tuotantoaika (tuntia)		
	os. A	os. B	os. C
1	4	2	8
2	4	4	4

Kullakin osastolla käytettävissä oleva työvoima on rajallinen siten, että työtunteja on osastoilla viikossa käytettävissä seuraavasti

osasto	työtunteja viikossa
A	320
B	240
C	400

Kate (myyntitulo - valmistuskustannukset) yhdeltä "1"-tuotteelta on 300€ ja kate yhdeltä "2"-tuotteelta 500€.

Muodosta LP-malli yrityksen kokonaiskatteen maksimoimiseksi. (Älä ratkaise mallia.)

$$x_1 = \text{tuotteen 1 valmistus viikossa (kpl/vko)}$$

$$x_2 = \text{tuotteen 2 valmistus viikossa (kpl/vko)}$$

LP-malli

$$\begin{aligned} \max z &= 300x_1 + 500x_2 \\ \text{ehdot} & \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 \leq 320 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 240 \\ 8x_1 + 4x_2 \leq 400 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Lindo

$$\begin{cases} x_1 = 26,7 \\ x_2 = 46,7 \\ z = 31333,37 \end{cases}$$

4. Edellisessä tehtävässä yrityksen työaika-resurssi on 960 tuntia/viikossa eli 24 työntekijää. a) Pohdi seuraavaa kysymystä: Jos yritykselle tarjoutuu mahdollisuus palkata kaksi uutta työntekijää, niin miten tämä uusi resurssi allokoitetaan (sijoitetaan) eri osastoille? b) Pohdi seuraavaa kysymystä: Jos samalla, kun saadaan kaksi uutta työntekijää, on mahdollista kouluttaa vanhojakin työntekijöitä, niin miten työresurssi allokoitetaan osastoille yrityksen voiton maksimoimiseksi?

$$\begin{aligned} \max z &= 300x_1 + 500x_2 \\ \text{ehdot} & \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 \leq 320 + r_A \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 240 + r_B \\ 8x_1 + 4x_2 \leq 400 + r_C \\ r_A + r_B + r_C = 80 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z &= 300x_1 + 500x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - r_A \leq 320 \\ 2x_1 + 4x_2 - r_B \leq 240 \\ 8x_1 + 4x_2 - r_C \leq 400 \\ r_A + r_B + r_C = 80 \end{cases} \end{aligned}$$

Lindo  $x_1 = 0, x_2 = 80, r_A = 0, r_B = 80, r_C = 0, z = 40000$

by simple method

A-operations für  $w_a$   
 B- " " " "  $w_b$   
 C- " " " "  $w_c$

$$\left( \begin{array}{l} \max z = 300x_1 + 500x_2 \\ \text{Stoff A} \\ 4x_1 + 4x_2 \leq w_a \\ 2x_1 + 4x_2 \leq w_b \\ 8x_1 + 4x_2 \leq w_c \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1040 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \max z = 300x_1 + 500x_2 \\ \text{Stoff A} \\ 4x_1 + 4x_2 - w_a \leq 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - w_b \leq 0 \\ 8x_1 + 4x_2 - w_c \leq 0 \\ w_a + w_b + w_c = 1040 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 86,7 \\ w_a = 326,7 \\ w_b = 326,7 \\ w_c = 326,7 \\ z = 42333,33 \end{array} \right\} \text{LINDO} \rightarrow$$

5. a) Piirrä seuraavan LP-mallin käypä alue.

$$\begin{aligned} \min z = & x_1 - 5x_2 \\ \text{ehdoin} & 2x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ & x_1 + x_2 \geq 14 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

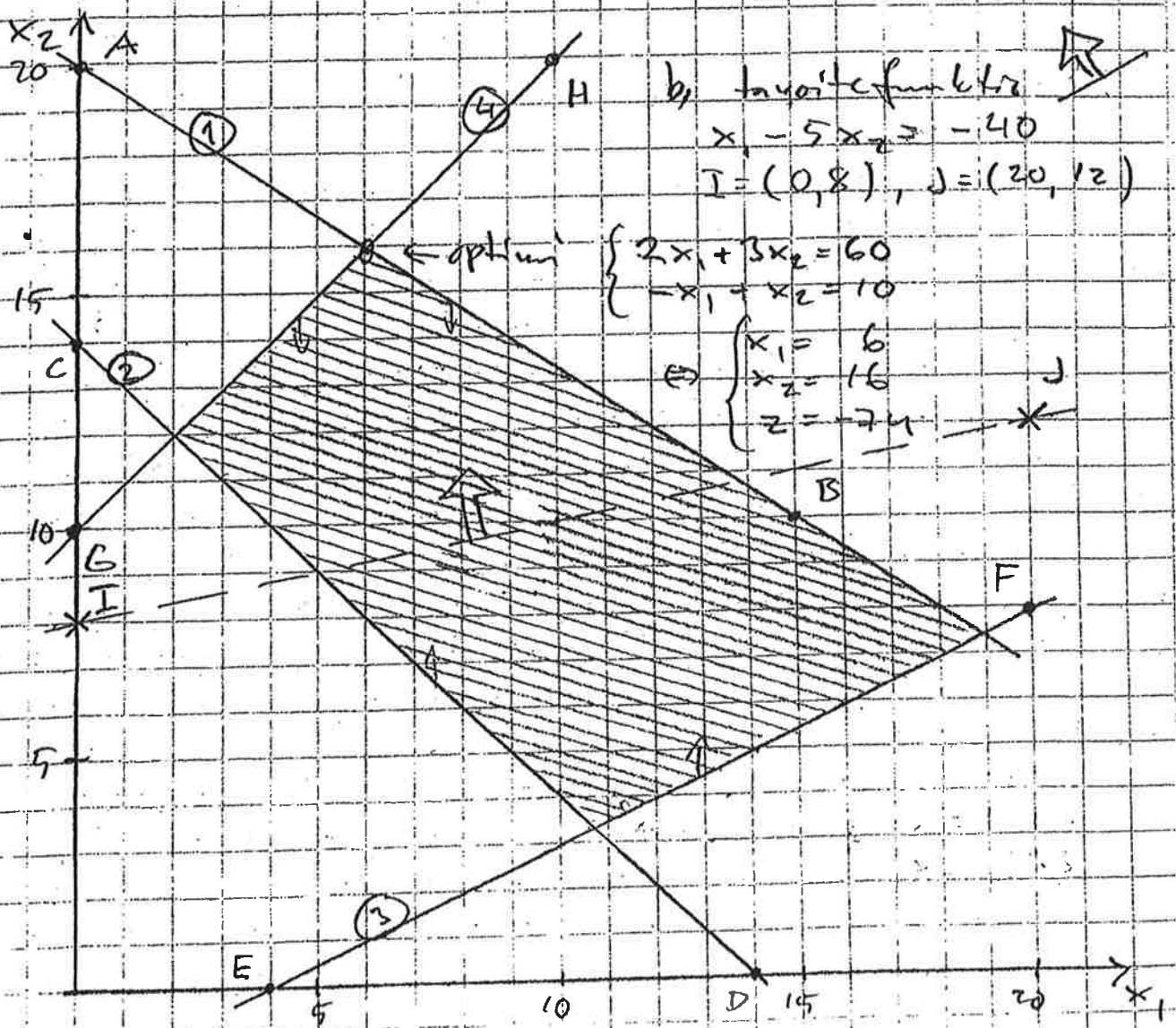
b) Ratkaise malli.

a) ①  $2x_1 + 3x_2 \leq 60 \downarrow A=(0,20), B=(15,10)$

②  $x_1 + x_2 \geq 14 \uparrow C=(0,14), D=(14,0)$

③  $x_1 - 2x_2 \leq 4 \uparrow E=(4,0), F=(20,8)$

④  $-x_1 + x_2 \leq 10 \downarrow G=(0,10), H=(10,20)$

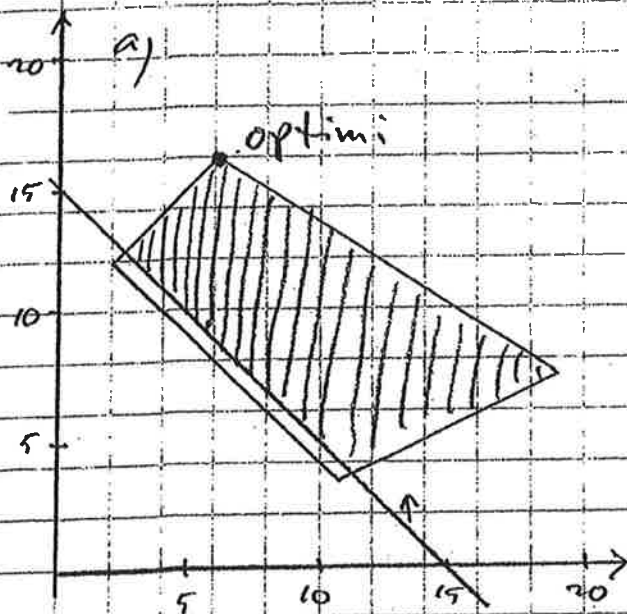


6. a) Miten tehtävän 5 optimiratkaisu muuttuu, jos rajoitteisiin lisätään uusi rajoite

$$x_1 + x_2 \geq 15$$

b) Miten edellisen tehtävän optimiratkaisu muuttuu, jos rajoitteisiin lisätään uusi rajoite

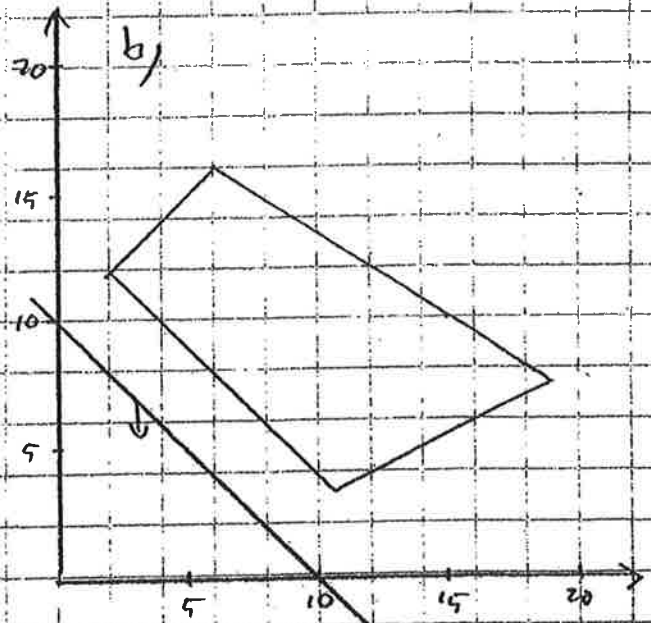
$$x_1 + x_2 \leq 10$$



$$x_1 + x_2 \geq 15 \uparrow \text{yls.}$$

$$K = (0, 15), L = (15, 0)$$

Käypä alue pienempi,  
muuta optimi  
ei muuttunut



$$x_1 + x_2 \leq 10 \downarrow \text{alasp.}$$

$$M = (0, 10), N = (10, 0)$$

Käypä alue tyhjä  
→ ei ratkaisua