Tampereen kesäyliopisto, kevät 2015

# Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

**9. harjoitus**, (la 16.1.2016)

**1.** Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

Jonka käänteismatriisi on

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tarkista laskemalla, että annettu $A$:n käänteismatriisi on oikein.
Siis tarkista, että seuraavat ovat totta

a) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Ratkaise tämän tiedon avulla $x$ ja $y$ yhtälöparista

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) $(2\ 1)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 2\cdot 3 + 1\cdot(-5) = 1$ ✓

$(2\ 1)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 = 0$ ✓

$(5\ 3)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 5\cdot 3 + 3\cdot(-5) = 0$ ✓

$(5\ 3)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\cdot(-1) + 3\cdot 2 = 1$ ✓

b) $(3\ -1)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 3\cdot 2 + (-1)\cdot 5 = 1$ ✓

$(3\ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\cdot 1 + (-1)\cdot 3 = 0$ ✓

$(-5\ 2)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = -5\cdot 2 + 2\cdot 5 = 0$ ✓

$(-5\ 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -5\cdot 1 + 2\cdot 3 = 1$ ✓

c) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + (-1)\cdot 1 \\ -5\cdot 3 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix}$

$\therefore\ x = 8,\ y = -13$

Tark. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 8 + 1\cdot(-13) \\ 5\cdot 8 + 3\cdot(-13) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

**2.** Merkitään tehtävän 1c) yhtälöryhmän ratkaisua vektorina $(x_0\ y_0)^T$. Merkitään vektorilla $(x_1\ y_1)^T$ sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta ensimmäisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Merkitään vektorilla $(x_2\ y_2)^T$ sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta toisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Toisin sanoen

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Laske vektorit $(x_1\ y_1)^T$ ja $(x_2\ y_2)^T$.
*Huomaa, että yhtälöryhmän kerroinmatriisin $\boldsymbol{A}$ käänteismatriisi $\boldsymbol{A}^{-1}$ on nyt tiedossamme. Se esiintyi tehtävässä 1. Tämän vuoksi ylivoimaisesti helpoin tapa ratkaista yhtälöryhmät (??) ja (??) on käyttää periaatetta: "ratkaisu on $\boldsymbol{A}^{-1}$ kertaa RHS".*

$$A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} \quad [1c)]$$

---

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \end{pmatrix}$$

---

$$A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix}$$

**3.** a) Kun yhtälöryhmä (??)[1] muutettiin yhtälöryhmäksi (??)[2], niin ensimmäisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Silloin ratkaisu muuttui määrän

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Laske tämä muutos.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$A^{-1}$:n 1. sarake

b) Kun yhtälöryhmä (??) muutettiin yhtälöryhmäksi (??), niin toisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Silloin ratkaisu muuttui määrän

1 3

$$\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}.$$

Laske tämä muútos.

c) Voitko löytää nämä muutosvektorit suoraan käänteismatriisista $A^{-1}$?

$$\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\ -11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\ -13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$$

$A^{-1}$:n 2. sarake

**4.** Laske determinantit

a) $\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix} = 2\cdot 1 - (-1)\cdot(-3) = 2 - 3 = \underline{\underline{-1}}$

b) $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix} = +2\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix}5 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}5 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}$

$= 2\cdot(1-0) - 0\cdot(5-0) + 1\cdot(5-3) = \underline{\underline{4}}$

c) $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix} \overset{\cdot 2}{\leftarrow} = \begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 2 = \underline{\underline{12}}$

Olkoon tutkittavina matriisit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

**5.** Laske a) determinantti det(M) b) transpoosi $\mathbf{M}^T$ ja c) käänteismatriisi $\mathbf{M}^{-1}$ matriisille $\boldsymbol{M}$.

a) $\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= 1\cdot(3-0) - 2(2-0) + 0 = \underline{\underline{-1}}$

b) $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 2 \ \cdot(-1)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 2 \ \cdot 1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**6.** Määritä rivioperaatioiden avulla käänteismatriisi matriisille $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot 3$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{2} \ \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \ \cdot\frac{1}{2}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5 & 1{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow N^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & -0{,}5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7 Määritä adjungaatin avulla.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

minorit

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad m_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad m_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$m_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad m_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad m_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad m_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(N) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +0 - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$N^{-1} = \frac{1}{\det(N)} \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{21} & m_{31} \\ -m_{12} & m_{22} & -m_{32} \\ m_{13} & -m_{23} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} (1) & -(-1) & (-1) \\ -(1) & (-3) & -(-1) \\ (-2) & -(0) & (0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & -0{,}5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7 b) Määritä adjungaatin avulla $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

minori

$m_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad m_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad m_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$

$m_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad m_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad m_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$

$m_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad m_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$$\det(\underline{N}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +0 - 0 + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2-(-3)) = 10$$

$$N^{-1} = \frac{1}{\det(N)} \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} (1) & -(-3) & (-2) \\ -(4) & (-2) & -(-2) \\ (5) & -(5) & (0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ -0{,}4 & -0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Onko matriisi

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

säännöllinen (eli onko sillä känteismatriisi)?
(Ohje: Voit lopettaa laskemisen sillä hetkellä, kun olet varma, että käänteismatriisi löytyy. On olemassa monta tapaa saada vastaus selville. Helpoin tapa on laskea determinantti kehittäen determinantti sopivaa riviä käyttäen.)

$$\det(Q) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +0 - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0$$

$$= 2 \neq 0 \rightarrow Q \text{ on säännöllinen}$$

8. Alla on taulukossa esitettynä erään yrityksen tuotannon jakautuminen ja panosten käyttö tilikaudella. Laske tuotteiden omakustannusarvot.

| | | Os1 | Os2 | Os3 | myynti (kpl) | yhteensä (kpl) | hinta (€/kpl) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Os1 | 50 | 100 | 0 | 850 | 1000 | $p_1$ |
| | Os2 | 10 | 40 | 50 | 400 | 500 | $p_2$ |
| | Os3 | 20 | 0 | 30 | 200 | 250 | $p_3$ |
| raaka-aine 1 | tt1 | 300 | 0 | 700 | | 1000 | 1.00 |
| raaka-aine 2 | tt2 | 400 | 400 | 0 | | 800 | 10.00 |
| työvoima 1 | tt3 | 70 | 100 | 150 | | 320 | 20.00 |
| työvoima 2 | tt4 | 10 | 15 | 10 | | 35 | 50.00 |

$$A = \begin{pmatrix} \frac{50}{1000} & \frac{100}{500} & \frac{0}{250} \\ \frac{10}{1000} & \frac{40}{500} & \frac{50}{250} \\ \frac{20}{1000} & \frac{0}{500} & \frac{30}{250} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}20 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}08 & 0{,}20 \\ 0{,}02 & 0 & 0{,}12 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{300}{1000} & \frac{0}{500} & \frac{700}{250} \\ \frac{400}{1000} & \frac{400}{500} & \frac{0}{250} \\ \frac{70}{1000} & \frac{100}{500} & \frac{150}{250} \\ \frac{10}{1000} & \frac{15}{500} & \frac{10}{250} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0 & 2{,}80 \\ 0{,}40 & 0{,}80 & 0 \\ 0{,}07 & 0{,}20 & 0{,}60 \\ 0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}04 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} 1{,}00 \\ 10{,}00 \\ 20{,}00 \\ 50{,}00 \end{pmatrix} \qquad \bar{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = ?$$

$$\bar{p}^T = \bar{c}^T B (I - A)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 10 & 20 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0 & 2{,}80 \\ 0{,}40 & 0{,}80 & 0 \\ 0{,}07 & 0{,}20 & 0{,}60 \\ 0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}20 & 0 \\ -0{,}01 & 0{,}92 & -0{,}16 \\ -0{,}02 & 0 & 0{,}88 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\overset{\text{Excel}}{=} \begin{pmatrix} 7{,}177 & 16{,}234 & 22{,}780 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad p_1 = 7{,}18\ €$$
$$p_2 = 16{,}23\ €$$
$$p_3 = 22{,}78\ €$$

1 ~~6~~. **Kasvata edellisen tehtävän yksikköhintoja siten, että jokaisesta tuotteesta saadaan 15% kate. Laske sitten jokaisen osaston kokonaistuotokset, myyntituotot ja tuotannontekijöiden kustannukset, kun lopputuotteiden myynti muuttuu seuraavan taulukon mukaiseksi.**

| | myynti (kpl) |
|---|---|
| Os1 | 500 |
| Os2 | 1000 |
| Os3 | 400 |

**Miten suuren katteen yritys kokonaisuudessaan saa ?**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Myyntihinta } p_i^* = k p_i \\ \text{omakustannusarvo } p_i \\ \text{kate } 15\% \end{array}\right\} \Rightarrow \quad k p_i - p_i = 0{,}15\, k p_i$$

$$0{,}85 k = 1$$
$$k = \frac{1}{0{,}85}$$

$$p_1^* = \frac{7{,}17679\ €}{0{,}85} = 8{,}44\ €$$

$$p_2^* = \frac{16{,}23408\ €}{0{,}85} = 19{,}74\ €$$

$$p_3^* = \frac{22{,}78047\ €}{0{,}85} = 26{,}80\ €$$

Myyntitulo

$$\bar{p}^{*T}\bar{d} = (8{,}44 \quad 17{,}74 \quad 26{,}80)\begin{pmatrix}500\\1000\\400\end{pmatrix} = 34\,680€$$

Valmistuskustannukset

$$\bar{c}^T B\bar{x} = \underbrace{\bar{c}^T B(I-A)^{-1}}_{\bar{p}^T}\bar{d}$$

$$= (7{,}177 \quad 16{,}234 \quad 22{,}750)\begin{pmatrix}500\\1000\\400\end{pmatrix}$$

$$= 28\,934{,}5€$$

Kate $34680€ - 28934{,}5€ = 5745{,}5€$

$(16{,}6\%)$

10 ~~5~~. Millä vakion $a$ arvoilla matriisi

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on säännöllinen?

W on säännöllinen $\Leftrightarrow \det(W) \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Leftrightarrow -3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - a\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Leftrightarrow -3\cdot(0-1) + 0 - a(-1-0) \neq 0$

$\Leftrightarrow 3 + 0 + a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq -3$

Vast: W on säännöllinen jos $a \neq -3$

11 ~~4.~~ **Määritä edellisen tehtävän matriisin *W* käänteismatriisi.**

$\det(W) = a+3$ (laskettiin edellisessä tehtävässä)

$W_{11} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a \quad W_{12} = \begin{vmatrix} 3 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad W_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$W_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad W_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad W_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$W_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a-1 \quad W_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = -a-3 \quad W_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$

$$W^{-1} = \frac{1}{\det(W)} \begin{pmatrix} +W_{11} & -W_{21} & +W_{31} \\ -W_{12} & +W_{22} & -W_{32} \\ +W_{13} & -W_{23} & +W_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a+3} \begin{pmatrix} +(-a) & -(-1) & +(2a-1) \\ -(0) & +(0) & -(-a-3) \\ +(3) & -(-1) & +(-7) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a+3} \begin{pmatrix} -a & 1 & 2a-1 \\ 0 & 0 & a+3 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Testi $W^{-1}W = \frac{1}{(a+3)} \begin{pmatrix} -a & 1 & 2a-1 \\ 0 & 0 & a+3 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{a+3} \cdot \begin{pmatrix} a+3+0 & -2a+1+2a-1 & -a+a+0 \\ 0+0+0 & 0+0+a+3 & 0+0+0 \\ -3+3+0 & 6+1-7 & 3+a+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$