Tampereen kesäyliopisto, 2015-2016

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

2. välikoe, (ti 26.1.2016)

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin (myös graafinen laskin on sallittu) ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava). opettaja: Matti Laaksonen

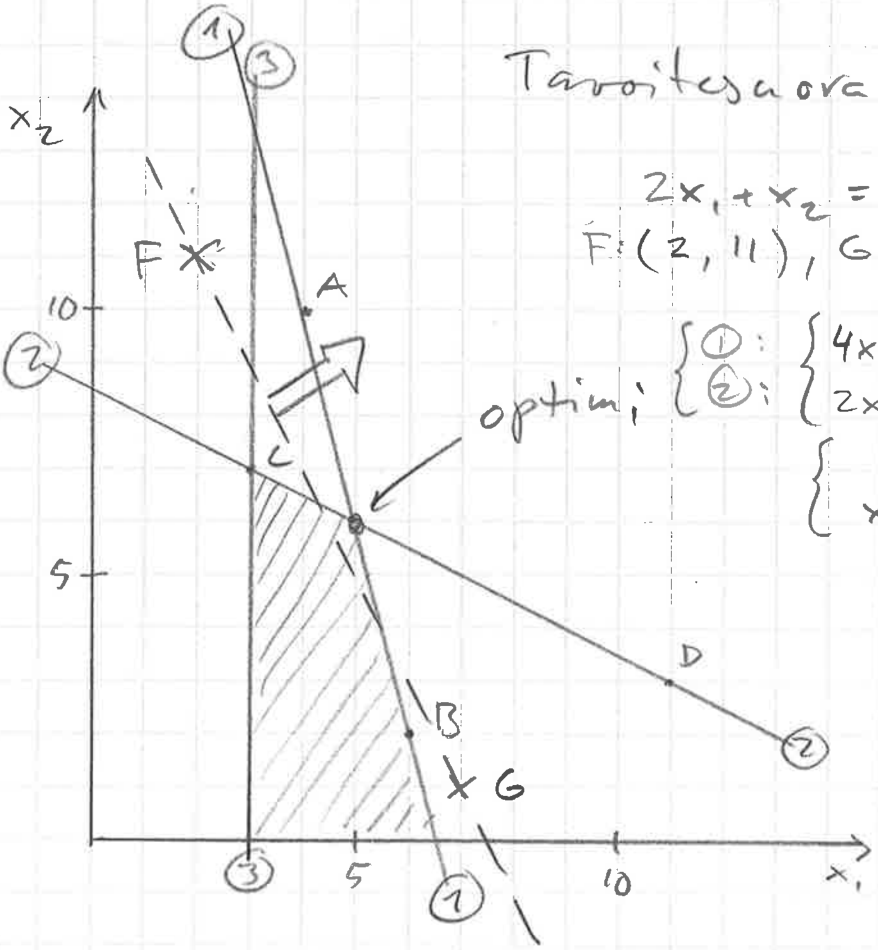
1. Ratkaise graafisesti LP-malli

$$\begin{array}{lrcrcl} \max z = & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{ehdoin} & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 26 \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 34 \\ & & & x_1 & \geq & 3 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

1\. rajoite $4x_1 + x_2 \leq 26$ $\downarrow$ A:(4, 10), B:(6, 2)

2\. rajoite $2x_1 + 4x_2 \leq 34$ $\downarrow$ C:(3, 7), D:(11, 3)

3\. rajoite $x_1 \geq 3$ $\to$ E:(3, 0)



Tavoitesuora

$2x_1 + x_2 = 15$

F:(2, 11), G:(7, 1)

optimi

$$\begin{cases} ① : \\ ② : \end{cases} \begin{cases} 4x_1 + x_2 = 26 \\ 2x_1 + 4x_2 = 34 \end{cases} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \quad | : 2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -7x_2 = -42 \\ x_1 + 2x_2 = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 6 \\ x_1 = 17 - 2 \cdot 6 = 5 \end{cases}$$

$z = 2 \cdot 5 + 6 = 16$

Vast: Optimissa $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $z = 16$

2. Laske a) determinantti det(**A**) b) käänteismatriisi $\mathbf{A}^{-1}$ ja c) tulo $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}$, kun

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) $$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 1 \;\; \cdot 2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2)\cdot 1 = \underline{-2}$$

$$\left(\text{tai} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right.$$
$$= 1\cdot(6-10) - 2\cdot(6-5) + 2\cdot(4-2)$$
$$\left. = -4 - 2 + 4 = \underline{-2} \right)$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 2 \cdot 1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 1 \;\; \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

minorit $m_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4$, $m_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$, $m_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$m_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$, $m_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$, $m_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$m_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6$, $m_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$, $m_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $$B^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2y + 3z = 19 \\ 3x + 5y - 2z = 9 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 19 \\ 3 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right) \cdot 3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 19 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 19 \end{array}\right) \cdot 2 \cdot (-1) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 & (1) \\ y - z = -3 & (2) \\ 5z = 25 & (3) \end{cases}$$

$(3) \rightarrow z = 5$

$(2) \rightarrow y - 5 = -3$

$y = -3 + 5 = 2 \rightarrow y = 2$

$(1) \rightarrow x + 2 \cdot 2 - 5 = 2$

$x = 2 - 4 + 5 = 3$

Vastaus: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$

Tarkistus: $\begin{cases} 3 + 2 \cdot 2 - 5 = 2 & \text{ok} \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 19 & \text{ok} \\ 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = 9 & \text{ok} \end{cases}$

4. Laske integraalit

$$\text{a) } \int (3x^2 + x^2)dx \qquad \text{b) } \int_2^4 (x+3)dx$$

1

a) $\int (3x^2 + x^2)\,dx = x^3 + \frac{1}{3}x^3 + C = \underline{\underline{\frac{4}{3}x^3 + C}}$

b) $\int_2^4 (x+3)\,dx = \Big/_2^4 \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)$

$= \left(\frac{1}{2}\cdot 4^2 + 3\cdot 4\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 2^2 + 3\cdot 2\right)$

$= (8 + 12) - (2 + 6)$

$= 20 - 8 = \underline{\underline{12}}$

5. a) Milloin voi ja milloin kannattaa käyttää Cramerin kaavoja?
b) Mitä eroa on homogeenisella ja ei-homogeenisella yhtälöryhmällä? c) Miksi Laspeyresin ja Paaschenin tuoteryhmä-indeksit saattavat erota suuresti toisistaan?

a) Cramerin kaavoja voi käyttää jos yhtälöryhmä on "kvadraattinen" (kerroinkaavio on neliömatriisi) ja kerroinkaavio on säännöllinen ($\det \neq 0$).
Cramerin kaavat sopivat yhtälöryhmiin, joissa on kirjain-parametreja kertoimina

b) Ei-homogeenisella ($RHS \neq \bar{0}$) yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, vain jos kerroinkaavio on vapaa
Homogeenisella ($RHS = \bar{0}$) yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu vain jos kerroinmatriisi on sidottu

c) Laspeyres ja Paaschen käyttävät eri painokertoimia indeksin laskemiseen.