

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

1. harjoitus, (la 29.10.2016)

1. Laske seuraavat laskut. Laske kukin lasku ensin käsin kynää ja paperia käyttäen. Anna vastaukset tarkkoina murtolukuina. Laske lasku myös laskimella ilman paperia ja kynää.

$$\text{a) } \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \quad \text{b) } 2 - \frac{3}{5} \quad \text{c) } \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{4}}$$

Ratkaisu:

$$\text{a) } \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

laskimella: $2 \boxed{\div} 3 \boxed{+} 1 \boxed{\div} 4 \boxed{=} 0,9166666667$

$$\text{b) } 2 - \frac{3}{5} = \frac{10}{5} - \frac{3}{5} = \frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4$$

laskimella: $2 \boxed{-} 3 \boxed{\div} 5 \boxed{=} 1,4$

$$\text{c) } \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{4}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{4}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{7/4}{5/4} = \frac{7}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{5} = 1,4$$

laskimella: $(\boxed{(} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{\div} \boxed{4} \boxed{)}) \boxed{\div} (\boxed{(} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{\div} \boxed{4} \boxed{)}) \boxed{=} 1,4$

2. Laske seuraavat laskut. Laske kukin lasku ensin käsin kynää ja paperia käyttäen. Anna vastaukset tarkkoina murtolukuina. Laske lasku myös laskimella ilman paperia ja kynää.

$$\text{a) } 2^3 + 4^2 \quad \text{b) } \frac{2+6}{3} \quad \text{c) } \left(3 - \frac{1}{3}\right) \cdot 2$$

Ratkaisu:

$$\text{a) } 2^3 + 4^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 8 + 16 = 24$$

laskimella: $2 \boxed{\wedge} 3 \boxed{+} 4 \boxed{\wedge} 2 \boxed{=} 24$

$$\text{b) } \frac{2+6}{3} = \frac{8}{3}$$

laskimella: $(\boxed{(} \boxed{2} \boxed{+} \boxed{6} \boxed{)}) \boxed{\div} 3 \boxed{=} 2,6666666667$

$$\text{c) } \left(3 - \frac{1}{3}\right) \cdot 2 = \left(\frac{9}{3} - \frac{1}{3}\right) \cdot 2 = \left(\frac{8}{3}\right) \cdot 2 = \frac{16}{3}$$

laskimella: $(\boxed{(} \boxed{3} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{\div} \boxed{3} \boxed{)}) \boxed{\times} 2 \boxed{=} 5,3333333333$

3. Miten paljon on 17,2% luvusta 325,25?

Ratkaisu:

$$\frac{17,2}{100} \cdot 325,10 = 55,9172 \approx 55,9$$

4. Miten monta prosenttia 20,32 on luvusta 310,10?

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \frac{P}{100} \cdot 310,10 &= 20,32 \\ \Leftrightarrow P &= \frac{100 \cdot 20,32}{310,10} = 6,552724927 \approx 6,553 \end{aligned}$$

Joskus lasketaan

$$\begin{aligned} \frac{P}{100} \cdot 310,10 &= 20,32 \\ \Leftrightarrow \frac{P}{100} &= \frac{20,32}{310,10} = 0,06552724927 \approx 0,06553 \end{aligned}$$

Kummassakin tapauksessa vastaus on: 6,553%.

5. Tuotteen alkuperäinen hinta oli 250,00€. Alennettu hinta on 195,00€. Mikä on alennusprosentti?

Ratkaisu: Alennus on $250,00\text{€} - 195,00\text{€} = 55,00\text{€}$. Alennusprosentti on silloin

$$\frac{55,00\text{€}}{250,00\text{€}} \cdot 100\% = 22,00\%$$

6. Ratkaise yhtälöt

$$\text{a) } 2x + 2 = 7x + 8 \quad \text{b) } 6(x + 2) = 5x + 10 \quad \text{c) } 3x + 1 = 3(x + 1)$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad 2x + 2 &= 7x + 8 \\ \Leftrightarrow 2x - 7x &= 8 - 2 \\ \Leftrightarrow -5x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= -6/5 = -1,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \quad 6(x + 2) &= 5x + 10 \\ \Leftrightarrow 6x + 12 &= 5x + 10 \\ \Leftrightarrow 6x - 5x &= 10 - 12 \\ \Leftrightarrow x &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \quad 3x + 1 &= 3(x + 1) \\ \Leftrightarrow 3x + 1 &= 3x + 3 \\ \Leftrightarrow 3x - 3x &= 3 - 1 \\ \Leftrightarrow 0 &= 2 \quad \text{epätosi} \rightarrow \text{Ratkaisujoukko on tyhjä} \end{aligned}$$

Vastaus: a) $x = -1,2$ b) $x = -2$ c) $R_j = \emptyset$.

7. Ratkaise yhtälöt

$$\text{a) } 2x^2 + 3x + 1 = 0 \quad \text{b) } 5x^2 + x = 4x^2 - 2x + 4 \quad \text{c) } (x+1)(x-3) = (x+1)$$

Ratkaisu:

$$\text{a) } 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3+1}{4} = \frac{-2}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3-1}{4} = \frac{-4}{4}.$$

$$\text{Vastaus: } x = -0,5 \quad \text{tai} \quad x = -1,0$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \quad 5x^2 + x &= 4x^2 - 2x + 4 \\ 5x^2 - 4x^2 + x + 2x - 4 &= 0 \\ x^2 + 3x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2}.$$

$$\text{Vastaus: } x = 1 \quad \text{tai} \quad x = -4$$

c) Toisen asteen yhtälöllä on korkeintaan kaksi reaalista juurta. Ne löytyvät helposti, sillä yhtälö on tosi, jos $(x+1) = 0$ tai $(x-3) = 1$ eli $x = -1$ tai $x = 4$. Siis

Vastaus: a) $x = -0,5$ tai $x = -1,0$ b) $x = -1,0$ tai $x = -4,5$ c) $x = -1$ tai $x = 4$.

8. Ratkaise epäyhtälöt

$$\text{a) } x - 1 \leq 3x + 1 \quad \text{b) } 3(x+1) \geq 5(x-1)$$

Ratkaisu:

$$\text{a) } \quad x - 1 \leq 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x - 3x \leq 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow -2x \leq 2 \quad | : (-2)$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1$$

$$\text{b) } \quad 3(x+1) \geq 5(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3 \geq 5x - 5$$

$$\Leftrightarrow -2x \geq -8 \quad | : (-2)$$

$$\Leftrightarrow x \leq 4$$

9. Yritys myy tammikuussa 256 tuotetta. Yhden tuotteen myyntihinta on 25,20€ ja tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 18,10€ (per tuote). Myyntitulo on $256 \cdot 25,20e = 6451,20e$, valmistuskustannus on $256 \cdot 18,10e = 4633,60e$. Tuotantolinjan kate on myyntitulo - valmistuskustannus = $6451,20e - 4633,60e = 1817,60$. Kate on siis 28,17% myynnistä.

Helmikuussa tuotteita myydään 300 kappaletta. Myyntihinta ei kasva, mutta valmistuskustannukset (per tuote) kasvavat 10,0%.

- Laske helmikuun myyntitulo (koko tuotanto).
- Laske helmikuun valmistuskustannukset (koko tuotanto).
- Laske helmikuun kate (euroina).
- Laske helmikuun kate (prosentteina myynnistä).
- Miten monta prosenttia myyntitulo kasvoi?
- Miten monta prosenttia valmistuskustannukset kasvoivat?
- Miten monta prosenttia kate kasvoi?
- Miten monta prosenttiyksikköä kate kasvoi?

Ratkaisu: Yhden tuotteen osalta myyntihinta on tammi ja helmikuussa sama $p = 25,20\text{€}/\text{kpl}$.

Yhden tuotteen valmistuskustannus oli

tammikuussa $c_1 = 18,10 \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$ ja helmikuussa $c_2 = 1,10 \cdot 18,10 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 19,91 \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$

Yhden tuotteen kate oli

tammikuussa $k_1 = p - c_1 = 25,20 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} - 18,10 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 7,10 \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$ ja

helmikuussa $k_2 = p - c_2 = 25,20 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} - 19,91 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 5,29 \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$.

Yhden tuotteen kate-prosentti oli

tammikuussa $\frac{k_1}{p} \cdot 100\% = \frac{7,10}{25,20} \cdot 100\% = 28,17\%$ ja

helmikuussa $\frac{k_2}{p} \cdot 100\% = \frac{5,29}{25,20} \cdot 100\% = 20,99\%$.

Yhden tuotteen euro-määräinen kate muuttui

$$\frac{k_2 - k_1}{k_1} \cdot 100\% = \frac{5,29 - 7,10}{7,10} \cdot 100\% = -25,49\%$$

ja yhden tuotteen kate muuttui

$$20,99\% - 28,17\% = -7,18 \text{ prosenttiyksikköä.}$$

Koko tuotannon osalta myyntitulo oli

tammikuussa $R_1 = 256 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 25,20 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 6451,20 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$, ja

helmikuussa $R_2 = 300 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 25,20 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 7560,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$.

Koko tuotannon osalta valmistuskustannus oli

tammikuussa $C_1 = 256 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 18,10 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 4633,60 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$, ja

helmikuussa $C_2 = 300 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 19,91 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 5973,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$.

Koko tuotannosta euromääräinen kate oli
tammikuussa $K_1 = R_1 - C_1 = 6451,20 \frac{\text{€}}{\text{kk}} - 4633,60 \frac{\text{€}}{\text{kk}} = 1817,60 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$, ja
helmikuussa $K_2 = R_2 - C_2 = 7560,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}} - 5973,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}} = 1587,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$.

Koko tuotannon kate-prosentti oli
tammikuussa $\frac{K_1}{R_1} \cdot 100\% = \frac{1817,60}{6451,20} \cdot 100\% = 28,17\%$ ja
helmikuussa $\frac{K_2}{R_2} \cdot 100\% = \frac{1587,00}{7560,00} \cdot 100\% = 20,99\%$.

Koko tuotannon euro-määräinen kate muuttui

$$\frac{K_2 - K_1}{K_1} \cdot 100\% = \frac{1587,00 - 1817,60}{1817,60} \cdot 100\% = -12,68\%$$

ja koko tuotannon kate muuttui

$$20,99\% - 28,17\% = -7,18 \text{ prosenttiyksikköä.}$$

Vastaukset kysymyksiin:

- Helmikuun myyntitulo (koko tuotanto) $R_2 = 7560,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$
- Helmikuun valmistuskustannukset (koko tuotanto) $C_2 = 5973,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$.
- Helmikuun kate (euroina) $K_2 = V$.
- Helmikuun kate (prosentteina myynnistä) on 20,99%.
- Myyntitulo kasvoi

$$\frac{R_2 - R_1}{R_1} \cdot 100\% = \frac{7560,00 - 6451,20}{6451,20} \cdot 100\% = 17,19\%.$$

f) Valmistuskustannukset kasvoivat

$$\frac{C_2 - C_1}{C_1} \cdot 100\% = \frac{5973,00 - 4633,60}{4633,60} \cdot 100\% = 28,91\%.$$

g) Kate muuttui

$$\frac{K_2 - K_1}{K_1} \cdot 100\% = \frac{1587,00 - 1817,60}{1817,60} \cdot 100\% = -12,68\%$$

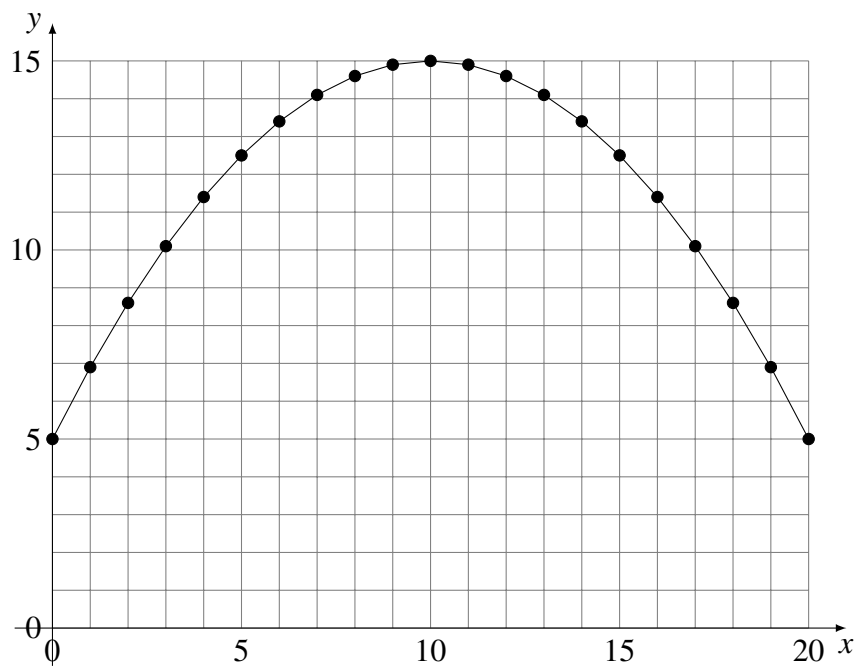
h) Kate muuttui

$$20,99\% - 28,17\% = -7,18 \text{ prosenttiyksikköä.}$$

10. Piirrä funktion $f(x) = 5 + 2x - 0.1x^2$ kuvaaja. Missä funktio on kasvava ja missä se on vähenevä? (Ohje: Piirrä kuvaaja välille $0 \leq x \leq 20$.)

Ratkaisu: Lasketaan ensin funktion arvoja pisteissä $x = 0, 1, 2, \dots, 20$.

x	$y = f(x) = 5 + 2x - 0,1x^2$	$(x; y)$	x	$y = f(x) = 5 + 2x - 0,1x^2$	$(x; y)$
0	$5 + 2 \cdot 0 - 0,1 \cdot 0^2 = 5,0$	(0; 5,0)	10	$5 + 2 \cdot 10 - 0,1 \cdot 10^2 = 15,0$	(10; 15,0)
1	$5 + 2 \cdot 1 - 0,1 \cdot 1^2 = 7,1$	(1; 7,1)	11	$5 + 2 \cdot 11 - 0,1 \cdot 11^2 = 14,9$	(11; 14,9)
2	$5 + 2 \cdot 2 - 0,1 \cdot 2^2 = 8,6$	(2; 8,6)	12	$5 + 2 \cdot 12 - 0,1 \cdot 12^2 = 14,6$	(12; 14,6)
3	$5 + 2 \cdot 3 - 0,1 \cdot 3^2 = 10,1$	(3; 10,1)	13	$5 + 2 \cdot 13 - 0,1 \cdot 13^2 = 14,1$	(13; 14,1)
4	$5 + 2 \cdot 4 - 0,1 \cdot 4^2 = 11,4$	(4; 11,4)	14	$5 + 2 \cdot 14 - 0,1 \cdot 14^2 = 13,4$	(14; 13,4)
5	$5 + 2 \cdot 5 - 0,1 \cdot 5^2 = 12,5$	(5; 12,5)	15	$5 + 2 \cdot 15 - 0,1 \cdot 15^2 = 12,5$	(15; 12,5)
6	$5 + 2 \cdot 6 - 0,1 \cdot 6^2 = 13,4$	(6; 13,4)	16	$5 + 2 \cdot 16 - 0,1 \cdot 16^2 = 11,4$	(16; 11,4)
7	$5 + 2 \cdot 7 - 0,1 \cdot 7^2 = 14,1$	(7; 14,1)	17	$5 + 2 \cdot 17 - 0,1 \cdot 17^2 = 10,1$	(17; 10,1)
8	$5 + 2 \cdot 8 - 0,1 \cdot 8^2 = 14,6$	(8; 14,6)	18	$5 + 2 \cdot 18 - 0,1 \cdot 18^2 = 8,6$	(18; 8,6)
9	$5 + 2 \cdot 9 - 0,1 \cdot 9^2 = 14,9$	(9; 14,9)	19	$5 + 2 \cdot 19 - 0,1 \cdot 19^2 = 6,9$	(19; 6,9)
10	$5 + 2 \cdot 10 - 0,1 \cdot 10^2 = 15,0$	(10; 15,0)	20	$5 + 2 \cdot 20 - 0,1 \cdot 20^2 = 5,0$	(20; 5,0)

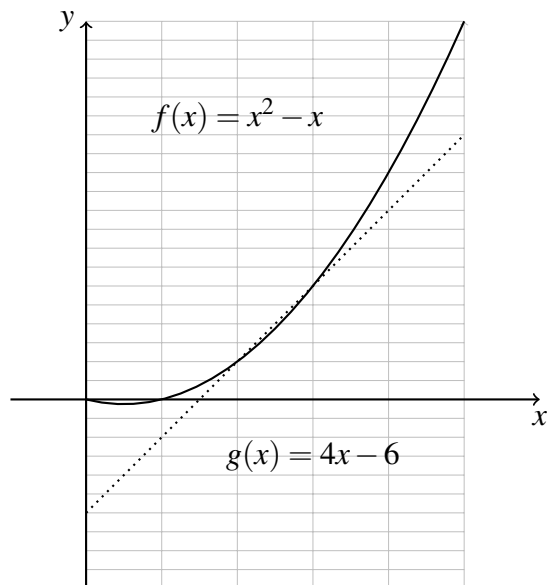


11. Piirrä välillä $0 \leq x \leq 5$ kuvaajat funktioille

$$f(x) = x^2 - x, \quad g(x) = 4x - 6$$

x	$f(x) = x^2 - x$	x	$g(x) = 4x - 6$
0.0		0.0	
0.5		1.0	
1.0		2.0	
2.0		3.0	
3.0		4.0	
4.0		5.0	
5.0			

x	$f(x) = x^2 - x$	x	$g(x) = 4x - 6$
0.0	0.0	0.0	0.0
0.5	-0.25	1.0	
1.0	0.0	2.0	
2.0	2.0	3.0	
3.0	6.0	4.0	
4.0	12.0	5.0	14.0
5.0	20.0		



12. Ovatko tehtävän 11 funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ kasvavia välillä $0 \leq x \leq 5$?

g on kasvava, mutta f ei ole kasvava välillä $0 \dots 5$. ($f(x)$ on vähenevä välillä $0 \leq x \leq 0.25$ ja kasvava välillä $0.25 \leq x \leq 5$.)

13. Ratkaise

a) $1.05^x = 1.50$ b) $(1.05)^x \geq (1.15)^3$

a)

$$\begin{aligned}
 1.05^x &= 1.50 & | \ln \\
 x \ln 1.05 &= \ln 1.50 \\
 x &= \frac{\ln 1.50}{\ln 1.05} \approx 8.31
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 1.05^x &\geq 1.15^3 & | \ln \\
 x \ln 1.05 &\geq 3 \ln 1.15 \\
 x &\geq \frac{3 \ln 1.15}{\ln 1.05} \approx 8.59
 \end{aligned}$$

14. Ratkaise yhtälöt

a) $\log_2 16 = x$, b) $\log_x 100 = 2$, c) $\log_9 x = 1/2$

a)

$$\begin{aligned}\log_2 16 = x &\Leftrightarrow 16 = 2^x \\ &\Leftrightarrow x = 4\end{aligned}$$

b)

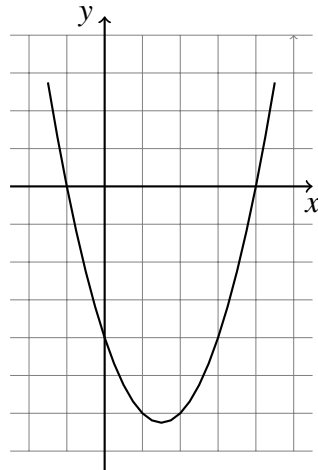
$$\begin{aligned}\log_x 100 = 2 &\Leftrightarrow 100 = x^2 \\ &\Leftrightarrow x = 10\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\log_9 x = 1/2 &\Leftrightarrow x = 9^{1/2} \\ &\Leftrightarrow x = 3\end{aligned}$$

15. Alla olevaan kuvaan on piirretty funktion $f(x) = x^2 - 3x - 4$ kuvaaja. Ratkaise kuvaajan avulla epäyhtälöt

a) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$, b) $x^2 - 3x - 4 < 0$, c) $x^2 - 3x - 4 \neq -4$



$$f(x) = x^2 - 3x - 4$$

a) $x \leq -1$ tai $x \geq 4$, b) $-1 < x < 4$, c) $x \neq 0$ ja $x \neq 3$.