

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

2. harjoitus, (pe 4.11.2016)

1. Yritys valmistaa kappaletavaraa q kappaletta viikossa. Yhden kappaleen materiaali- ja palkkakustannus on 7 €, joten tuotannon määrästä riippuvat muuttuvat kustannukset ovat $VC = 7q$ (€ viikossa). Yrityksen kiinteät kustannukset ovat $FC = 11250$ (€ viikossa). Lisäksi ahtaiden tuotantotilojen ja varastointiongelmien takia joudutaan turvautumaan ylityöhön, josta aiheutuu kustannuserä $LC = 0.005q^2$ (€ viikossa). Kokonaiskustannus viikossa on siis $TC(q) = FC + VC + LC = 11250 + 7q + 0.005q^2$. Tuotteen myyntihinta on 30€, joten tuottofunktio on $TR = 30q$ (€ viikossa) ja voittofunktio on $P(q) = TR - TC = 23q - 0.005q^2 - 11250$ (€ viikossa). Piirrä voittofunktion $P(q)$ ja yksikkökustannusfunktion $AC(q) = TC(q)/q$ kuvaajat kun $0 < q < 3000$. Mikä on $AC(q)$:n yksikkö? Mikä on mielestäsi järkevä tuotannon määrä?

(Ohje: yksiköt $[q] = \frac{\text{kpl}}{\text{vko}}$, $[P] = \frac{\text{€}}{\text{vko}}$, $[AC] = \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$)

2. Laske tehtävässä 1 esiintyneen voittofunktion derivaatta, eli

$$P'(q) = \frac{dP}{dq}.$$

Millä q :n arvolla $P'(q) = 0$? Tarkista tehtävän 1 kuvan avulla nollakohdan paikka. Millä q :n arvoilla $P'(q) \geq 0$? Tarkista tämäkin tehtävän 1 kuvan avulla.

3. Laske derivaatat

$$\begin{aligned} a) & \quad f'(3), \quad \text{kun } f(x) = x^2 - 4x, \\ b) & \quad g'(x), \quad \text{kun } g(x) = 7x^2 + 5x - 3, \\ c) & \quad h'(x), \quad \text{kun } h(x) = 3x \cdot (x^2 - 5) \end{aligned}$$

4. Erään tuotteen kustannusfunktio on $C(q) = 0.005q^2 + 6q + 200$. a) Määritä rajakustannus $MC(q) = C'(q)$, yksikkökustannus $AC(q) = C(q)/q$ ja kiinteät kustannukset $FC = C(0)$. b) Minkä arvon edellä mainitut funktiot saavat, kun tuotannon määrä on $q = 100$?

5. Edellisessä tehtävässä mainitun tuotteen kysyntäfunktio

$$p = f(q) = 10 - 0.01q$$

kertoo miten hinta (€/kpl) riippuu tarjolla olevien tuotteiden määrästä (kpl/kk). Tuottofunktio

$$R(q) = qp = q(10 - 0.01q) = 10q - 0.01q^2$$

Kertoo tuoton (myynnistä saatu kassatulo). Laske rajatuotto

$$MR(q) = R'(q)$$

6. Tehtävien 4 ja 5 yritys tuottaa nyt kaksisataa tuotetta kuussa ($q = 200$). Laske rajakustannus $MC(200)$ ja rajatuotto $MR(200)$. Kannattaako yrityksen kasvattaa vai pienentää tuotantoaan?

7. Yrityksen erään tuotelinjan kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.030q$ ja vastaava kustannusfunktio on $C(q) = 0.02q^2 + 5q + 150$. Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen. Mikä on maksimivoitto?

8. Tuotteen kysynnästä tiedämme seuraavat arviot: jos tarjonta on $q_1 = 50$, niin hinta asettu tasolle $p_1 = 20.10\text{€}$ ja jos tarjonta on $q_2 = 70$, niin hinta on vastaavasti $p_2 = 18.25\text{€}$.

a) Arvioi interpoloimalla tuotteen hintaa, kun tarjonta on $q = 55$.

b) Määritä tuotteen markkinoita kuvaava lineaarinen kysyntäfunktio.

9. Erään raaka-aineen kysyntä on 4800 kg/vuosi. Tilauskustannus on 4,00 euro/tilaus ja varaston yksikköylläpitokustannus on 2.00 €/kg/kuukausi.

a) (2p) Mikä on optimaalinen tilauserän koko?

b) (2p) Mitkä ovat varastonhoidon kokonaiskustannukset vuodessa?

c) (2p) Miten monta prosenttia kokonaiskustannus nousee optimiarvosta, jos tilauserää kasvatetaan optimiarvosta 10.0%.

10. Erään raaka-aineen kysyntä on 1600 kg/vuosi. Tilauskustannus on 30,00 euro/tilaus ja varaston yksikköylläpitokustannus on 1.25 €/kg/kuukausi.

a) (2p) Mikä on optimaalinen tilauserän koko?

b) (2p) Mitkä ovat varastonhoidon kokonaiskustannukset vuodessa?

c) (2p) Raaka-aineen toimittaja antaa sisäänostossa 1,0% määräalennuksen, jos tilauserä on vähintään 50 kg, 2% alennuksen jos tilauserä on vähintään 100 kg ja 3% alennuksen, jos tilauserä on vähintään 150 kg. Raaka-aineen normaali ostohinta on 2,00 €/kg. Mikä on nyt optimaalinen tilauserä?

Kaavoja:

$$\frac{d}{dx}ax^n = n \cdot ax^{n-1}$$

Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Varastomallit:

perusmalli $q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$

puutemalli $q_1 = q_0 \sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0 \sqrt{\frac{s}{h+s}},$

$$TC_1(q) = \frac{KD}{q} + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q}$$

tuotantomalli $q_2 = q_0 \sqrt{\frac{r}{r-D}}, \quad M_2 = q_0 \sqrt{\frac{r-D}{r}},$

$$TC_2(q) = \frac{KD}{q} + \frac{hq(r-D)}{2r}$$