

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

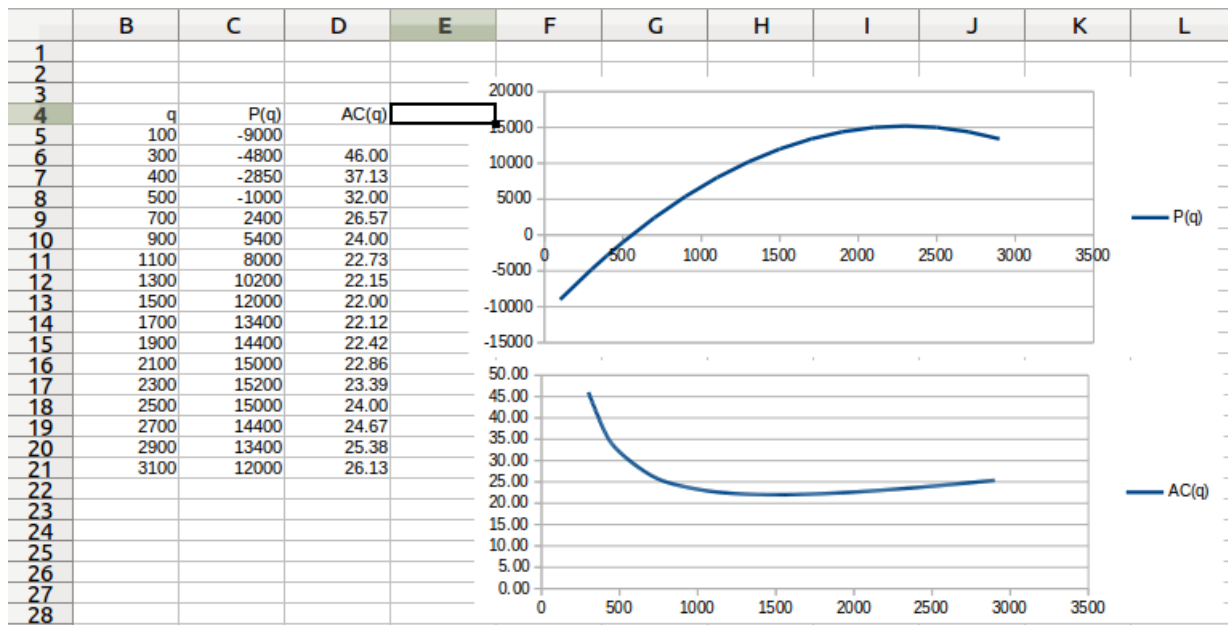
2. harjoitus, (pe 4.11.2016)

1. Yritys valmistaa kappaletavaraa q kappaletta viikossa. Yhden kappaleen materiaali- ja palkkakustannus on 7 €, joten tuotannon määrästä riippuvat muuttuvat kustannukset ovat $VC = 7q$ (€ viikossa). Yrityksen kiinteät kustannukset ovat $FC = 11250$ (€ viikossa). Lisäksi ahtaiden tuotantotilojen ja varastointiongelmien takia joudutaan turvautumaan ylityöhön, josta aiheutuu kustannuserä $LC = 0.005q^2$ (€ viikossa). Kokonaiskustannus viikossa on siis $TC(q) = FC + VC + LC = 11250 + 7q + 0.005q^2$. Tuotteen myyntihinta on 30€, joten tuottofunktio on $TR = 30q$ (€ viikossa) ja voittofunktio on $P(q) = TR - TC = 23q - 0.005q^2 - 11250$ (€ viikossa). Piirrä voittofunktion $P(q)$ ja yksikkökustannusfunktion $AC(q) = TC(q)/q$ kuvaajat kun $0 < q < 3000$. Mikä on $AC(q)$:n yksikkö? Mikä on mielestäsi järkevä tuotannon määrä?
 (Ohje: yksiköt $[q] = \frac{\text{kpl}}{\text{vko}}$, $[P] = \frac{\text{€}}{\text{vko}}$, $[AC] = \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$)

Ratkaisu:

$$P(q) = 23q - 0.005q^2 - 11250$$

$$AC(q) = \frac{TC(q)}{q} = \frac{11250 + 7q + 0.005q^2}{q} = \frac{11250}{q} + 7 + 0.005q$$



Yksikkökustannusten yksikkö on

$$[AC] = \frac{[TC]}{[q]} = \frac{\text{€}/\text{vko}}{\text{kpl}/\text{vko}} = \frac{\text{€}}{\text{vko}} \cdot \frac{\text{vko}}{\text{kpl}} = \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$$

Järkevä tuotannon määrä on noin 2300kpl/vko.

2. Laske tehtävässä 1 esiintyneen voittofunktion derivaatta, eli

$$P'(q) = \frac{dP}{dq}.$$

Millä q :n arvolla $P'(q) = 0$? Tarkista tehtävän 1 kuvan avulla nollakohdan paikka. Millä q :n arvoilla $P'(q) \geq 0$? Tarkista tämäkin tehtävän 1 kuvan avulla.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} P(q) &= 23q - 0.005q^2 - 11250 \\ \Leftrightarrow P'(q) &= 23 - 0.01q \end{aligned}$$

Voittofunktion derivaatta on nolla, kun

$$\begin{aligned} P'(q) &= 0 \\ \Leftrightarrow 23 - 0.01q &= 0 \\ \Leftrightarrow -0.01q &= -23 \quad | \cdot (-100) \\ \Leftrightarrow q &= 2300 \quad (\text{kuvan perusteella OK}) \end{aligned}$$

Voittofunktion derivaatta on ≥ 0 , kun

$$\begin{aligned} P'(q) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 23 - 0.01q &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -0.01q &\geq -23 \quad | \cdot (-100) \\ \Leftrightarrow q &\leq 2300 \quad (\text{kuvan perusteella OK}) \end{aligned}$$

3. Laske derivaatat

- a) $f'(3)$, kun $f(x) = x^2 - 4x$,
- b) $g'(x)$, kun $g(x) = 7x^2 + 5x - 3$,
- c) $h'(x)$, kun $h(x) = 3x \cdot (x^2 - 5)$

Ratkaisu: a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x \\ \longrightarrow f'(x) &= 2x - 4 \\ \longrightarrow f'(3) &= 2 \cdot 3 - 4 = 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= 7x^2 + 5x - 3 \\ \longrightarrow g'(x) &= 14x + 5 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} h(x) &= 3x \cdot (x^2 - 5) \\ &= 3x^3 - 15x \\ \longrightarrow h'(x) &= 9x^2 + 15 \end{aligned}$$

4. Erään tuotteen kustannusfunktio on $C(q) = 0.005q^2 + 6q + 200$. a) Määritä rajakustannus $MC(q) = C'(q)$, yksikkökustannus $AC(q) = C(q)/q$ ja kiinteät kustannukset $FC = C(0)$. b) Minkä arvon edellä mainitut funktiot saavat, kun tuotannon määrä on $q = 100$?

Ratkaisu: a)

$$MC(q) = \frac{d}{dq} (0.005q^2 + 6q + 200) = 0.01q + 6$$

$$AC(q) = \frac{0.005q^2 + 6q + 200}{q} = 0.005q + 6 + \frac{200}{q}$$

$$FC = 200$$

b)

$$MC(100) = 0.01 \cdot 100 + 6 = 7$$

$$AC(100) = 0.005 \cdot 100 + 6 + \frac{200}{100} = 8.5$$

$$FC = 200$$

5. Edellisessä tehtävässä mainitun tuotteen kysyntäfunktio

$$p = f(q) = 10 - 0.01q$$

kertoo miten hinta (€/kpl) riippuu tarjolla olevien tuotteiden määrästä (kpl/kk). Tuottofunktio

$$R(q) = qp = q(10 - 0.01q) = 10q - 0.01q^2$$

Kertoo tuoton (myynnistä saatu kassatulo). Laske rajatuotto

$$MR(q) = R'(q)$$

Ratkaisu:

$$MR(q) = \frac{d}{dq} (10q - 0.01q^2) = 10 - 0.02q$$

6. Tehtävien 4 ja 5 yritys tuottaa nyt kaksisataa tuotetta kuussa ($q = 200$). Laske rajakustannus $MC(200)$ ja rajatuotto $MR(200)$. Kannattaako yrityksen kasvattaa vai pienentää tuotantoaan?

Ratkaisu:

$$MC(q) = 0.01q + 6 \quad \longrightarrow \quad MC(200) = 0.01 \cdot 200 + 6 = 8$$

$$MR(q) = 10 - 0.02q \quad \longrightarrow \quad MR(200) = 10 - 0.02 \cdot 200 = 6$$

Koska rajakustannus on isompi kuin rajatuotto, ei yrityksen kannata kasvattaa tuotantoa (kustannukset kasvaisivat enemmän kuin tuotot). Yrityksen kannattaa pienentää tuotantoaan.

7. Yrityksen erään tuotelinjan kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.030q$ ja vastaava kustannusfunktio on $C(q) = 0.02q^2 + 5q + 150$. Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen. Mikä on maksimivoitto?

Ratkaisu: Rajatuotto

$$\begin{aligned}p &= 20 - 0.030q \\ \rightarrow R &= q \cdot p = q(20 - 0.030q) = 20q - 0.030q^2 \\ \rightarrow MR &= \frac{d}{dq} (20q - 0.030q^2) = 20 - 0.060q\end{aligned}$$

Rajakustannus

$$\begin{aligned}C &= 0.02q^2 + 5q + 150 \\ \rightarrow MC &= \frac{d}{dq} (0.02q^2 + 5q + 150) = 0.04q + 5\end{aligned}$$

Voitonmaksimointi

$$\begin{aligned}MC &= MR \\ \Leftrightarrow 0.04q + 5 &= 20 - 0.060q \\ \Leftrightarrow 0.04q + 0.06q &= 20 - 5 \\ \Leftrightarrow 0.1q &= 15 \\ \Leftrightarrow q &= 150\end{aligned}$$

Kun $q = 150$, niin voitto on

$$\begin{aligned}P(150) &= R(150) - C(150) = (20 \cdot 150 - 0.030 \cdot 150^2) - (0.02 \cdot 150^2 + 5 \cdot 150 + 150) \\ &= 20 \cdot 150 - 0.030 \cdot 150^2 - 0.02 \cdot 150^2 - 5 \cdot 150 - 150 \\ &= 975\end{aligned}$$

Vastaus: Voitto on siis suurin mahdollinen kun valmistetaan 150 tuotetta suunnitelujaksossa. Voitto on silloin 975 (€/jakso).

8. Tuotteen kysynnästä tiedämme seuraavat arviot: jos tarjonta on $q_1 = 50$, niin hinta asettu tasolle $p_1 = 20.10\text{€}$ ja jos tarjonta on $q_2 = 70$, niin hinta on vastaavasti $p_2 = 18.25\text{€}$.
a) Arvioi interpoloimalla tuotteen hintaa, kun tarjonta on $q = 55$.
b) Määritä tuotteen markkinoita kuvaava lineaarinen kysyntäfunktio.

Ratkaisu: Kaava:

$$\begin{aligned}f(x) &\approx f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) \\ \rightarrow p(q) &\approx p_1 + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} (q - q_1)\end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}p(55) &\approx 20.10 + \frac{18.25 - 20.10}{70 - 50} (55 - 50) \\ &= 20.10 + \frac{-1.85}{20} \cdot 5 = 19.6375 \approx 19.64\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}p(q) &\approx 20.10 + \frac{18.25 - 20.10}{70 - 50} (q - 50) \\ &= 20.10 + \frac{-1.85}{20} \cdot (q - 50) \\ &= 20.10 - 0.0925 \cdot (q - 50) \\ &= 24.725 - 0.0925q\end{aligned}$$

9. Erään raaka-aineen kysyntä on 4800 kg/vuosi. Tilauskustannus on 4,00 euro/tilaus ja varaston yksikköylläpitokustannus on 2.00 €/kg/kuukausi.

- a) (2p) Mikä on optimaalinen tilauserän koko?
 b) (2p) Mitkä ovat varastonhoidon kokonaiskustannukset vuodessa?
 c) (2p) Miten monta prosenttia kokonaiskustannus nousee optimiarvosta, jos tilauserää kasvatetaan optimiarvosta 10.0%.

Ratkaisu:

$$D = 4800 \frac{\text{kg}}{\text{vuosi}}$$

$$K = 4.00\text{€}$$

$$h = 2.00 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{kk}} = 24.00 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{vuosi}}$$

a)

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 4800}{24}} \text{kg} = 40 \text{kg}$$

b)

$$TC_0 = \frac{KD}{q_0} + h \cdot \frac{q_0}{2}$$

$$= \frac{4.00\text{€} \cdot 4800 \frac{\text{kg}}{\text{vuosi}}}{40 \text{kg}} + 24.00 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{40 \text{kg}}{2}$$

$$= 480 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 480 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 960 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}$$

c) Jos tilauserä onkin 44 kg, niin kokonaiskustannus on

$$TC_{44} = \frac{4.00\text{€} \cdot 4800 \frac{\text{kg}}{\text{vuosi}}}{44 \text{kg}} + 24.00 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{44 \text{kg}}{2}$$

$$= 436.36 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 528.00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 964.36 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}$$

Kustannukset nousivat siis

$$\frac{TC_{44} - TC_0}{TC_0} \cdot 100\% = \frac{964.36 - 960}{960} \cdot 100\% = 0.45\%$$

10. Erään raaka-aineen kysyntä on 1600 kg/vuosi. Tilauskustannus on 30,00 euro/tilaus ja varaston yksikköylläpitokustannus on 1.25 €/kg/kuukausi.

- a) (2p) Mikä on optimaalinen tilauserän koko?
 b) (2p) Mitkä ovat varastonhoidon kokonaiskustannukset vuodessa?
 c) (2p) Raaka-aineen toimittaja antaa sisäänostossa 1,0% määräalennuksen, jos tilauserä on vähintään 50 kg, 2% alennuksen jos tilauserä on vähintään 100 kg ja 3% alennuksen, jos tilauserä on vähintään 150 kg. Raaka-aineen normaali ostohinta on 2,00 €/kg. Mikä on nyt optimaalinen tilauserä?

Ratkaisu:

$$D = 1600 \frac{\text{kg}}{\text{vuosi}}$$

$$K = 30.00\text{€}$$

$$h = 1.25 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{kk}} = 15.00 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{vuosi}}$$

a)

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \cdot 1600}{15}} \text{kg} = 80 \text{kg}$$

b)

$$\begin{aligned} TC_0 &= \frac{KD}{q_0} + h \cdot \frac{q_0}{2} \\ &= \frac{30\text{€} \cdot 1600 \frac{\text{kg}}{\text{vuosi}}}{80 \text{kg}} + 15 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{80 \text{kg}}{2} \\ &= 600 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 600 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 1200 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \tilde{TC}(q) &= \frac{KD}{q} + h \cdot \frac{q}{2} + p \cdot D \\ \tilde{TC}(80) &= \frac{30 \cdot 1600}{80} + 15 \cdot \frac{80}{2} + 1.98 \cdot 1600 \\ &= 600 + 600 + 3168 = 4368\text{€/vuosi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{TC}(100) &= \frac{30 \cdot 1600}{100} + 15 \cdot \frac{100}{2} + 1.96 \cdot 1600 \\ &= 480 + 750 + 3136 = 4366\text{€/vuosi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{TC}(150) &= \frac{30 \cdot 1600}{150} + 15 \cdot \frac{150}{2} + 1.94 \cdot 1600 \\ &= 320 + 1125 + 3104 = 4549\text{€/vuosi} \end{aligned}$$

Edullisinta on siis tilata 100kg erissä (2%:n alennus).

Kaavoja:

$$\frac{d}{dx} ax^n = n \cdot ax^{n-1}$$

Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (f(x_2) - f(x_1))$$

Varastomallit:

perusmalli $q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$

puutemalli $q_1 = q_0 \sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0 \sqrt{\frac{s}{h+s}},$

$$TC_1(q) = \frac{KD}{q} + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q}$$

tuotantomalli $q_2 = q_0 \sqrt{\frac{r}{r-D}}, \quad M_2 = q_0 \sqrt{\frac{r-D}{r}},$

$$TC_2(q) = \frac{KD}{q} + \frac{hq(r-D)}{2r}$$