

## Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

### 3. harjoitus, (pe 11.11.2016)

1. Suurpesula tarvitsee 2 500 astiaa tiettyä pesuainetta kuukaudessa. Yksikköylläpitokustannus on 0.5€/astia/vuosi. Tilauskustannukset ovat 75€ tilaukselta. Pesula tilaa ainetta nykyisin 5 000 astian erissä. Miten suureen vuosisäästöön pesulan on mahdollista päästä muuttamalla tilauspolitiikkaansa? Miten tilaukset tällöin tehdään? Onko säästö mielestäsi suuri?

Ratkaisu:

$$D = 2500 \frac{\text{astiaa}}{\text{kk}} = 12 \frac{\text{kk}}{\text{vuosi}} \cdot 2500 \frac{\text{astiaa}}{\text{kk}} = 30\,000 \frac{\text{astiaa}}{\text{vuosi}}$$

$$K = 75\text{€}$$

$$h = 0.50 \frac{\text{€}}{\text{astia} \cdot \text{vuosi}}$$

Kokonaiskustannus nyt, kun  $q = 5\,000$  astiaa:

$$TC = \frac{KD}{q} + h \cdot \frac{q}{2}$$

$$= \frac{75\text{€} \cdot 30\,000 \frac{\text{astiaa}}{\text{vuosi}}}{5\,000 \text{ astiaa}} + 0.50 \frac{\text{€}}{\text{astia} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{5\,000 \text{ astiaa}}{2}$$

$$= 450 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 1\,250 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 1\,700 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}$$

Optimaalinen tilauserä:

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 75\text{€} \cdot 30\,000 \frac{\text{astiaa}}{\text{vuosi}}}{0.50 \frac{\text{€}}{\text{astia} \cdot \text{vuosi}}}} = 3\,000 \text{ astiaa}$$

Kokonaiskustannus, kun toimitaan optimaalisesti ( $q = q_0 = 3\,000$  astiaa):

$$TC_0 = \frac{KD}{q_0} + h \cdot \frac{q_0}{2}$$

$$= \frac{75\text{€} \cdot 30\,000 \frac{\text{astiaa}}{\text{vuosi}}}{3\,000 \text{ astiaa}} + 0.50 \frac{\text{€}}{\text{astia} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{3\,000 \text{ astiaa}}{2}$$

$$= 750 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 750 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 1\,500 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}$$

Vastaus: Pesula voi siis säästää  $200 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}$ . Tämä on noin 12% säästö varastoinnin kustannuksissa, mikä on melko paljon!

2. a) Laske 5.25% todelliseen vuosikorkoon liittyvä kuukausikorkokanta.  
b) Mikä on todellinen vuosikorko, kun kuukausikorkokanta on 0.008125?

Ratkaisu: a)

$$(1 + i_{kk})^{12} = 1.0525$$

$$\rightarrow 1 + i_{kk} = 1.0525^{1/12} = 1.00427312776 \quad \rightarrow \quad i_{kk} = 0.00427312776$$

b)

$$1 + i_{\text{vuosi}} = 1.008125^{12} = 1.10197722$$
$$\rightarrow i_{\text{vuosi}} = 0.102 \quad \rightarrow \quad \text{todellinen vuosikorko on } 10.2\%$$

**3.** Laske annuiteettilainen tasaerä (kuukausierä), kun lainan määrä on 4000€, todellinen vuosikorko on 3.15% ja laina-aika on 20 kuukautta.

*Ratkaisu:*

$$K_0 = 4000 \text{€}$$

$$n = 20$$

$$1 + i = 1.0315^{1/12} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} i = [1.0315^{1/12} - 1] \\ (1 + i)^n = 1.0315^{20/12} \end{cases}$$

$$k = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} K_0 = \frac{[1.0315^{1/12} - 1] \cdot 1.0315^{20/12}}{1.0315^{20/12} - 1} \cdot 4000 \text{€} = 205.48 \text{€}$$

*Vastaus:* Kuukausierä on 205.48€. (Tarkistus:  $20 \cdot 205.48 \text{€} = 4109.60 \text{€}$ . OK)

**4.** Laske osamaksuerä, kun käteishinta on 25000€, käsiraha on 5000€, osamaksulisä on 800€. Osamaksuerät maksetaan kuukausittain. Maksuaika on 15 kuukautta ja todellinen vuosikorko on 6.25%.

*Ratkaisu:*

$$K_0 = 25000 \text{€} - 5000 \text{€} + 800 \text{€} = 20,800 \text{€}$$

$$n = 15$$

$$1 + i = 1.0625^{1/12} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} i = [1.0625^{1/12} - 1] \\ (1 + i)^n = 1.0625^{15/12} \end{cases}$$

$$k = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} K_0 = \frac{[1.0625^{1/12} - 1] \cdot 1.0625^{15/12}}{1.0625^{15/12} - 1} \cdot 20800 \text{€} = 1443.51 \text{€}$$

*Vastaus:* Kuukausierä on 1443.51€. (Tarkistus:  $15 \cdot 1443.51 \text{€} = 21652.65 \text{€}$ . OK)

**5.** Laske käteishinta, kun käsiraha on 5000€, osamaksulisä on 4% osamaksuvelasta. Osamaksuerä on 2050€, erät maksetaan kuukausittain, maksuaika on 15 kuukautta ja todellinen vuosikorko on 6.25%.

*Ratkaisu:*

$$H = x$$

$$h = 5000 \text{€}$$

$$m = 0.04 \cdot (x - 5000 \text{€})$$

$$K_0 = H - h + m = x - 5000 \text{€} + 0.04(x - 5000 \text{€})$$

$$= 1.04x - 5200 \text{€}$$

$$n = 15$$

$$1 + i = 1.0625^{1/12} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} i = [1.0625^{1/12} - 1] \\ (1 + i)^n = 1.0625^{15/12} \end{cases}$$

Nyt

$$\begin{aligned}\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot K_0 &= k \\ \Leftrightarrow \frac{[1.0625^{1/12} - 1] \cdot 1.0625^{15/12}}{1.0625^{15/12} - 1} \cdot K_0 &= 2050 \text{ €} \\ \Leftrightarrow K_0 &= \frac{(1.0625^{15/12} - 1) \cdot 2050 \text{ €}}{[1.0625^{1/12} - 1] \cdot 1.0625^{15/12}} \\ \Leftrightarrow K_0 &= 29539.01 \text{ €}\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}1.04x - 5200 \text{ €} &= 29539.01 \text{ €} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{29539.01 \text{ €} + 5200 \text{ €}}{1.04} \\ \Leftrightarrow x &= 33402.89 \text{ €} \approx 33400 \text{ €}\end{aligned}$$

Vastaus: Käteishinta on 33400 €.

6. Kirjoita seuraavan summan kaikki termit näkyviin ja laske summa sitten sopivalla kaavalla

$$\sum_{k=2}^6 \left(\frac{1}{5} \cdot 2^k\right)$$

7. Olkoon  $(1+i)^{12} = 1.0825$ . Laske

$$\sum_{k=3}^{25} \frac{100 \text{ €}}{(1+i)^k}$$

8. Yrittäjä rakentaa uutta tuotantolinjaa, jonka loppuun tulee pakkauslaite. Saatujen tarjousten perusteella on olemassa kolme mahdollista pakkauslaitetta. Mikä laitteista on mielestäsi edullisin, kun tuotantolinja on toiminnassa toistaiseksi (ainakin 30 vuotta) ja laskentakorkona on 7,50% (todellinen vuosikorko).

laite	hankintahinta (€)	käyttökustannus (€/kk)	käyttöikä (vuotta)
A-pak	7 000	80	3
Narux	5 000	70	2
Hippo	3 000	200	3

## Kaavoja:

yksinkertainen korkolasku:

$$K_t = (1 + it)K_0 = \left(1 + \frac{P}{100}t\right)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

koronkorkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0, \text{ kun } t = 1, 2, 3, \dots$$

jatkuva korkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1 + i) = e^{\rho}$$

## Jaksolliset suoritukset

$$\text{prolongointitekijä } s_{n,i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$\text{diskonttaustekijä } a_{n,i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n}$$

$$\text{kuoletuskerroin } c_{n,i} = \frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}$$

## Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\text{annuiteetti } k = c_{n,i}K_0$$

$$\text{osamaksuerä } k = c_{n,i}(H - h + m)$$

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$