Tampereen kesäyliopisto, syksy 2016

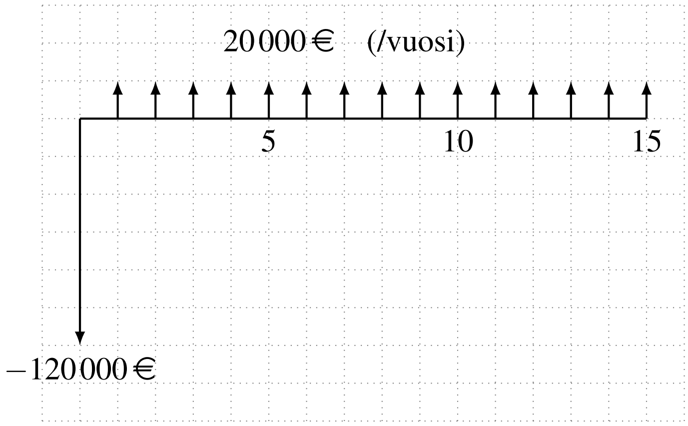
Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

4. harjoitus, (la 12.11.2016)

1. Tutkitaan investointiprojektia, jonka perusinvestointi on 120 000€, pitoaika on 15 vuotta ja keskimääräinen nettotulo on 20 000€(/ vuosi). Jäännösarvo oletetaan nyt nollaksi.

a) Piirrä kassavirtakaavio.
b) Laske projektin nykyarvo (laskentakorko on 16% p.a.).
c) Arvioi projektin sisäistä korkokantaa.

a)



b)

$$\begin{aligned}
NNA &= -120\,000€ + \sum_{k=1}^{15} \frac{20\,000€}{1.16^k} \\
&= -120\,000€ + \frac{20\,000€}{1.16^1} \cdot \frac{(1-1.16^{-15})}{(1-1.16^{-1})} \\
&= -120\,000€ + 20\,000€ \cdot \frac{(1.16^{15}-1)}{0.16 \cdot 1.16^{15}} = -8\,491€
\end{aligned}$$

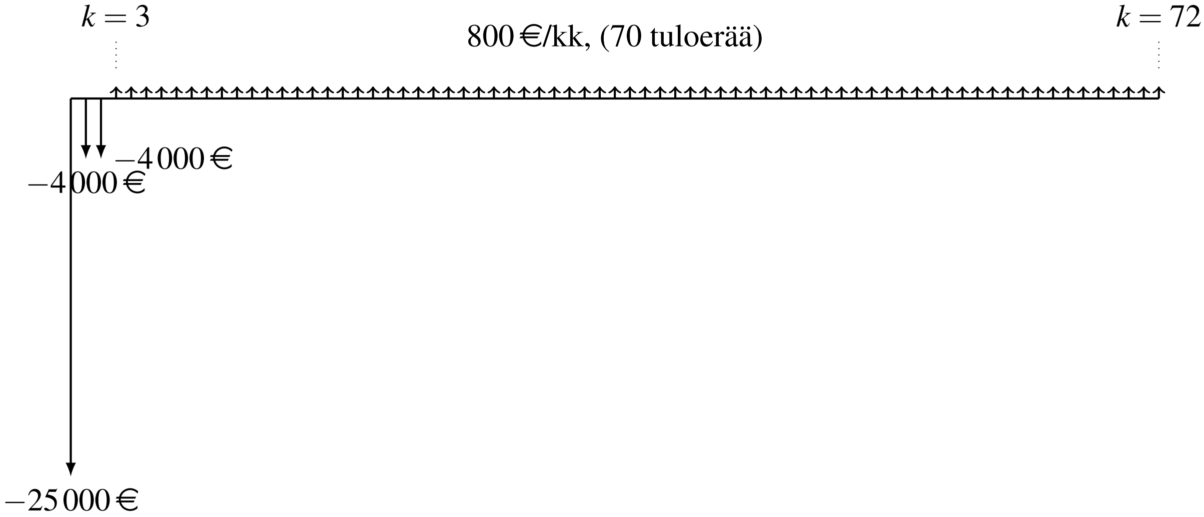
c)

i	NNA
14%	$-120\,000€ + 20\,000€ \cdot \frac{(1.14^{15}-1)}{0.14 \cdot 1.14^{15}} = 2\,843€$
15%	$-120\,000€ + 20\,000€ \cdot \frac{(1.15^{15}-1)}{0.15 \cdot 1.15^{15}} = -3\,053€$

$$\longrightarrow i_{sis} \approx 0.145 \qquad (14.5\%)$$

2. Yrittäjä ostaa koneen ja aloittaa uuden tuotantolinjan. Koneen ostohinta on 25 000€. Koneen asentaminen ja koekäyttö kestää kaksi kuukautta ja sitoo kaksi työntekijää, joiden palkkameno asennusjaksolta on 2000€/kk/hlö. Asennusjakson jälkeen alkaa tuotanto, joka tuottaa yrittäjälle nettotuloa 800€/kk. Mikä on projektin nykyarvo, kun laskentakorkona on 8% (todellinen vuosikorko)? *Projektin koko kesto on 6 vuotta.*

Ratkaisu:



$$
\begin{aligned}
NNA &= -25\,000€ - \frac{4\,000€}{1.08^{1/12}} - \frac{4\,000€}{1.08^{2/12}} + \sum_{k=3}^{72} \frac{800€}{1.08^{k/12}} \\
&= -25\,000€ - \frac{4\,000€}{1.08^{1/12}} - \frac{4\,000€}{1.08^{2/12}} + \frac{800€}{1.08^{2/12}} \cdot \frac{(1.08^{70/12}-1)}{[1.08^{1/12}-1]\cdot 1.08^{70/12}} \\
&= -25\,000€ - 3\,974.43€ - 3\,949.02€ + 44\,399.60€ \\
&= 11\,476.15€
\end{aligned}
$$

3. Investointiprojektin perusinvestointi on 8 250€ja kuukausittainen nettotulovirta alkaa heti investoinnin jälkeen ja kestää 5 vuotta. Miten suuri tulee kuukausittaisen nettotulovirran olla (x€/kk) jotta investoinnin nettonykyarvo olisi positiivinen, kun laskentakorko on 8% (todellinen vuosikorko).

Ratkaisu: Tarkastellaan ensin vakiotulovirtaa ($x€$/kk), joka alkaa nyt ja jatkuu 5 vuotta (eli 60 kk). Tulovirran nykyarvo on

$$
\begin{aligned}
NA_{tulovirta} &= \sum_{k=1}^{60} \frac{x€}{(1+i)^k} = \frac{x€}{(1+i)} \cdot \frac{(1-(1+i)^{-60})}{(1-(1+i)^{-1})} \\
&= x€ \cdot \underbrace{\frac{((1+i)^{60}-1)}{i\cdot(1+i)^{60}}}_{=a_{i,60}} = x€ \cdot \frac{(1.08^{60/12}-1)}{[1.08^{1/12}-1]\cdot 1.08^{60/12}}
\end{aligned}
$$

Siis tiivistäen: tulovirran nykyarvo on

$$NA_{tulovirta} = a \cdot x€.$$

Vakiotulovirran nykyarvo on siis 'jaksollisten suoritusten diskonttaustekijä kertaa yhden jakson netto-tulo'. Periaate toimii, jos tulovirta on vakaa ja alkaa heti.Siis ensimmäinen tuloerä kirjataan jakson 1 lopussa. Huomaa, että $1/a = c$. Diskonttaus-tekijän a käänteisarvo on kuoletuskerroin c.

Koko projektin nettonykyarvo on positiivinen, jos

$$\begin{aligned} NNA &\geq 0€ \\ \Leftrightarrow -8\,250€ + a \cdot x€ &\geq 0€ \\ \Leftrightarrow a \cdot x€ &\geq 8\,250€ \\ \Leftrightarrow x€ &\geq \frac{1}{a} \cdot 8\,250€ \\ \Leftrightarrow x€ &\geq c \cdot 8\,250€ \end{aligned}$$

Tämä merkitsee sitä, että kuukaudessa saadun nettotuoton on oltava vähintään perusinvestointia varten otetun tasaerälainan kuukausierän suuruinen.

Lasketaan lopulta numeroarvo:

$$x€ \geq \frac{[1.08^{1/12} - 1] \cdot 1.08^{60/12}}{(1.08^{60/12} - 1)} \cdot 8\,250€ = 166.18€$$

4. Projektin perusinvestointi on $H = 2800€$. Syntyvän jatkuvan kassavirran voimakkuus on $k = 100$ €/kk. Kassavirta alkaa hetkellä $t_1 = 0$ (vuotta) ja päättyy hetkellä $t_2 = 2{,}5$ (vuotta). Jäännösarvo on $JA = +500€$. Laskentakorkokanta on 6% (p.a.) eli $\rho = \ln(1{,}06)\frac{1}{\text{vuosi}}$. Jatkuvan korkolaskun mukaan projektin NettoNykyArvo on

$$NNA = -H + \int_{t_1}^{t_2} e^{-\rho t} k(t)dt + e^{-\rho t_2} JA = -H + \frac{k}{\rho}(e^{-\rho t_1} - e^{-\rho t_2}) + e^{-\rho t_2} JA.$$

a) Laske NNA, kun ($k = 1200€/\text{vuosi}$, $\rho = \ln(1{,}06)\frac{1}{\text{vuosi}}$, $t_1 = 0\text{vuotta}$ $t_2 = 2{,}5\text{vuotta}$)
b) Laske NNA, kun ($k = 100€/\text{kk}$, $\rho = \ln(1{,}06^{1/12})\frac{1}{\text{kk}}$, $t_1 = 0\text{kk}$ $t_2 = 30\text{kk}$)
c) Mitä voit sanoa sisäisestä korkokannasta?

Ratkaisu:
a)

$$\begin{aligned} NNA &= -H + \frac{k}{\rho}(e^{-\rho t_1} - e^{-\rho t_2}) + e^{-\rho t_2} JA \\ &= -2\,800€ + \frac{1\,200\frac{€}{\text{vuosi}}}{\ln(1{,}06)\frac{1}{\text{vuosi}}} \cdot \left(e^0 - e^{-\ln(1{,}06)\frac{1}{\text{vuosi}} \cdot 2{,}5\text{vuosi}} \right) + \dots \\ &\qquad \dots + e^{-\ln(1{,}06)\frac{1}{\text{vuosi}} \cdot 2{,}5\text{vuosi}} \cdot 500€ \\ &= -2\,800€ + \frac{1\,200€}{\ln(1{,}06)} \cdot \left(1 - \frac{1}{1{,}06^{2{,}5}}\right) + \frac{1}{1{,}06^{2{,}5}} \cdot 500€ = 423{,}95€ \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
NNA &= -H + \frac{k}{\rho}(e^{-\rho t_1} - e^{-\rho t_2}) + e^{-\rho t_2} JA \\
&= -2\,800€ + \frac{100\frac{€}{\text{kk}}}{\ln(1{,}06^{1/12})\frac{1}{\text{kk}}} \cdot \left(e^0 - e^{-\ln(1{,}06^{1/12})\frac{1}{\text{kk}}\cdot 30\text{kk}} \right) + \dots \\
&\qquad \dots + e^{-\ln(1{,}06^{1/12})\frac{1}{\text{kk}}\cdot 30\text{kk}} \cdot 500€ \\
&= -2\,800€ + \frac{100€}{\frac{1}{12}\cdot \ln(1{,}06)} \cdot \left(1 - \frac{1}{1{,}06^{\frac{1}{12}\cdot 30}}\right) + \frac{1}{1{,}06^{\frac{1}{12}\cdot 30}} \cdot 500€ = 423{,}95€
\end{aligned}
$$

c) Koska nettonykyarvo on positiivinen, niin sisäinen korkokanta on suurempi kuin nykyarvolaskussa käytetty laskentakorko 6% (per annum).

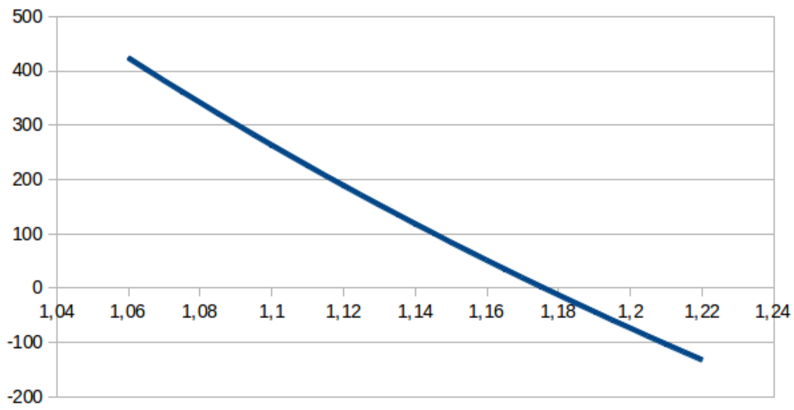
Jos vuotuinen laskentakorkotekija on $r = 1 + i_{tod}$, niin

$$
NNA = -2\,800€ + \frac{1\,200€}{\ln(r)} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^{2,5}}\right) + \frac{1}{r^{2,5}} \cdot 500€
$$

Kun tämän lausekkeen arvoja lasketaan Exelillä, saadaan alla oleva kuva. Kuvan perusteella sisäinen korkokanta on noin 17,5%.

Tehtävän 4 kuva:

r	NNA
1,06	423,9468663
1,065	402,9302034
1,07	382,1928808
1,075	361,7297256
1,08	341,5356861
1,085	321,6058282
1,09	301,9353323
1,095	282,5194898
1,1	263,3537005
1,105	244,433469
1,11	225,7544026
1,115	207,3122076
1,12	189,1026873
1,125	171,1217392
1,13	153,3653521
1,135	135,8296041
1,14	118,5106601
1,145	101,4047694
1,15	84,50826342
1,155	67,81755364
1,16	51,32912951
1,165	35,03955636
1,17	18,94547344
1,175	3,043592003
1,18	-12,6693066
1,185	-28,1963725
1,19	-43,5406894
1,195	-58,7052762
1,2	-73,6930882
1,205	-88,5070192
1,21	-103,149903



5. Verrataan kahta projektia. Projektin A perusinvestointi on 2 000€ ja se tuottaa kahden vuoden ajan 100€/kk. Projektin B perusinvestointi on 16 000€ja se tuottaa kymmenen vuoden ajan 200€/kk. Kassavirroissa on huomioitu vain liiketoiminnan tuotot ja kustannukset. Rahoitusmenoja ei ole vielä laskettu mukaan.
a) Laske projektien nettonykyarvot, kun laskentakorko on 8% (todellinen vuosikorko). Ovatko projektit kannattavia?
b) Suhteellinen nykyarvo määritellään kaavalla:
suhteellinen nykyarvo = SNA = (tulovirran nykyarvo)/(kustannusvirran nykyarvo).
Laske tehtävän projekteille A ja B suhteelliset nettonykyarvot. Kumpi projekteista on kannattavampi?

a) *Ratkaisu:*

$$
\begin{aligned}
NNA_A &= -2\,000€ - \sum_{j=1}^{24} \frac{100€}{(1{,}08^{1/12})^j} \\
&= -2\,000€ - \frac{100€}{1{,}08^{1/12}} \cdot \left(\frac{1-(1{,}08^{-1/12})^{24}}{1-(1{,}08^{-1/12})} \right) = 217{,}29€ > 0€ \text{ (ok)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
NNA_B &= -16\,000€ - \sum_{j=1}^{120} \frac{200€}{(1{,}08^{1/12})^j} \\
&= -16\,000€ - \frac{200€}{1{,}08^{1/12}} \cdot \left(\frac{1-(1{,}08^{-1/12})^{120}}{1-(1{,}08^{-1/12})} \right) = 686{,}48€ > 0€ \text{ (ok)}
\end{aligned}
$$

Kumpikin projekti on kannattava (8% laskentakorolla).

B-projektin nettonykyarvo on suurempi (kolminkertainen), mutta silti tulos tuntuu B:n kannalta lievältä pettymykseltä, sillä B-projektissa kiinnitettiin kahdeksankertainen pääoma, ja tuottoja odotettiin 10 vuotta!
b)

$$
\begin{aligned}
SNA_A &= \frac{2\,217{,}29€}{2\,000€} = 1{,}1086 > 1 \text{ (ok)} \\
SNA_B &= \frac{16\,686{,}48€}{16\,000€} = 1{,}0429 > 1 \text{ (ok)}
\end{aligned}
$$

Kumpikin projekti on kannattava (8% laskentakorolla). Projekti A on suhteellisesti parempi ($SNA_A > SNA_B$).

6. a) Laske Excelin IRR-funktion avulla tehtävän 5 projekteille sisäiset korkokannat (per annum). Kumpi nyt tuntuu kannattavammalta?

b) Laske pääoman tuottoasteet $\mathrm{ROI_{II}}$ tehtävän 5 projekteille. (Tulokset eivät välttämättä ole järkeviä, sillä ROI on hyvä kannattavuuden mittari vain pitkälle projektille.) Kumpi nyt tuntuu kannattavammalta?

Ratkaisu: a) Excelin laskemat jaksoon (kk) liittyvät sisäiset korkokannat ovat $IRR_{kk,A} = 1{,}513\%$ ja $IRR_{kk,B} = 0{,}724\%$. Vuosijakson sisäiset korkokannat ovat silloin.

$$
\begin{aligned}
IRR_{a,A} &= (1{,}01513)^{12} - 1 = 0{,}19747 \quad \longrightarrow i_{sis,A} = 19{,}75\% \\
IRR_{a,B} &= (1{,}00724)^{12} - 1 = 0{,}09044 \quad \longrightarrow i_{sis,B} = 9{,}04\%
\end{aligned}
$$

Projekti A antaa tuoton nopeammin ja antaa paremman koron sijoitetulle pääomalle. Se on siis kiistatta parempi.

b)

$$
\begin{aligned}
\text{a)} \qquad \mathrm{ROI}_{II,A} &= \frac{1\,200€}{2\,000€} \cdot 100\% = 60\%, \\
\mathrm{ROI}_{II,B} &= \frac{2\,400€}{16\,000€} \cdot 100\% = 15\%.
\end{aligned}
$$

ROI antaa nyt selvästi liian isoja arvoja. (Kannattavuutta ei kannat nyt ratkaista näiden perusteella.)

7. Laske takaisinmaksuajat tehtävän 5 projekteille. Kumpi nyt tuntuu kannattavammalta?

Ratkaisu: Takaisinmaksuaika on $n = \dfrac{\ln(k/(k-iH))}{\ln(1+i)}$.

$$
\begin{aligned}
n_A &= \frac{\ln(100€/(100€ - (1{,}08^{1/12}-1)\cdot 2\,000€))}{\ln(1{,}08^{1/12})} = 21{,}5\,\mathrm{kk} = 1\,\mathrm{vuosi}\,9{,}5\,\mathrm{kk} \\
n_B &= \frac{\ln(200€/(200€ - (1{,}08^{1/12}-1)\cdot 16\,000€))}{\ln(1{,}08^{1/12})} = 112{,}7\,\mathrm{kk} = 9\,\mathrm{vuotta}\,4{,}7\,\mathrm{kk}
\end{aligned}
$$

Ainakin kumpikin projekti on kannattava siinä mielessä, että ne maksavat itsensä takaisin. Koska projektien kestot ovat erilaisia, niiden vertailu ei ole helppoa takaisinmaksuajan perusteella.

Kaavoja:

$$\begin{aligned} & \text{yksinkertainen korkolasku:} \\ K_t &= (1+it)K_0 = (1+\frac{p}{100}t)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1 \\ & \text{koronkorkolasku:} \\ K_t &= (1+i)^t K_0, \text{ kun } t = 1,2,3,\ldots \\ & \text{jatkuva korkolasku:} \\ K_t &= (1+i)^t K_0 = e^{\rho t}K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1+i) = e^{\rho} \end{aligned}$$

Jaksolliset suoritukset

$$\begin{aligned} \text{prolongointitekijä } s_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ \text{diskonttaustekijä } a_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \\ \text{kuoletuskerroin } c_{n,i} &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \end{aligned}$$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\begin{aligned} \text{annuiteetti } k &= c_{n,i}K_0 \\ \text{osamaksuerä } k &= c_{n,i}(H - h + m) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$