

5. harjoitus, (pe 18.11.2016)

1. Laske integraalit

$$a) \int (3x^2 - x) dx \quad b) \int_1^4 (2x+1) dx$$

$$a) \int (3x^2 - x) dx = \frac{3}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + C = \underline{\underline{x^3 - \frac{1}{2} x^2 + C}}$$

$$b) \int_1^4 (2x+1) dx = \int_1^4 (x^2 + x) = (4^2 + 4) - (1^2 + 1) \\ = (16 + 4) - (1 + 1) = \underline{\underline{18}}$$

2. Tarkista derivoimalla kaavat

$$\int e^{-\rho x} dx = \frac{-1}{\rho} e^{-\rho x}$$

$$\int x \cdot e^{-\rho x} dx = \left(\frac{-x}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) e^{-\rho x}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{-1}{\rho} e^{-\rho x} \right) = \frac{-1}{\rho} \frac{d}{dx} (e^{-\rho x}) = \frac{-1}{\rho} \cdot (-\rho \cdot e^{-\rho x}) \\ = e^{-\rho x} \quad \boxed{\text{ok!}}$$

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{-x}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) e^{-\rho x} \right] = \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{-x}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) \right] \cdot e^{-\rho x} \\ + \left(\frac{-x}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) \frac{d}{dx} (e^{-\rho x}) \\ = \frac{-1}{\rho} e^{-\rho x} + \left(\frac{-x}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) \cdot (-\rho) \cdot e^{-\rho x} \\ = \frac{-1}{\rho} e^{-\rho x} + \left(x + \frac{1}{\rho} \right) e^{-\rho x} = x e^{-\rho x} \quad \boxed{\text{ok!}}$$

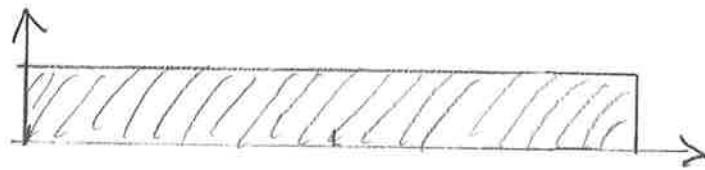
3. Tarkastellaan kahta kassavirtaa $c_1(t)$ ja $c_2(t)$. Kumpikin kassavirta kestää 2 vuotta. Ensimmäinen kassavirta on vakiotulovirta 100€/kk. Toisen kassavirran voimakkuus pienenee tasaisesti. Alussa kassavirta on 150€/kk ja lopussa 50€/kk. Laskentakorkokanta on 5%/p.a. ($\rho = \ln 1.05 \frac{1}{\text{vuosi}}$). Laske nykyarvot

$$NA_1 = \int_0^2 e^{-\rho t} 1200 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} dt$$

$$NA_2 = \int_0^2 e^{-\rho t} (1800 - 600 \cdot t) \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} dt$$

(Vuodatta kassavirtavirta $c_1(t)$ kestää 24kk $\cdot 100\text{€}/\text{kk} = 2400\text{€}$)

$$\begin{aligned} NA_1 &= 1200 \text{€} \int_0^2 e^{-\rho t} dt = 1200 \text{€} \int_0^2 \frac{1}{s} e^{-st} dt \\ &= 1200 \text{€} \left(\frac{-1}{s} e^{-st} - \frac{-1}{s} e^0 \right) = \frac{1200 \text{€}}{s} \left(1 - \frac{1}{1,05^2} \right) \\ &= \frac{1200 \text{€}}{\ln(1,05)} \left(1 - \frac{1}{1,05^2} \right) = \underline{2286,62 \text{€}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} NA_2 &= 1800 \text{€} \int_0^2 e^{-\rho t} dt - 600 \text{€} \int_0^2 t e^{-\rho t} dt \\ &= \frac{1800 \text{€}}{\ln(1,05)} \left(1 - \frac{1}{1,05^2} \right) - 600 \text{€} \int_0^2 \left(\frac{-t}{s} - \frac{1}{s^2} \right) e^{-st} dt \\ &= \frac{1800 \text{€}}{\ln(1,05)} \left(1 - \frac{1}{1,05^2} \right) - 600 \text{€} \left(\left(\frac{-2}{\ln 1,05} - \frac{1}{(\ln 1,05)^2} \right) \frac{1}{1,05^2} + \frac{1}{\ln(1,05)^2} \right) \\ &= 3429,93 \text{€} - 1124,72 \text{€} = \underline{2305,23 \text{€}} \end{aligned}$$



4. Yritys A valmistaa sairaalatarvikkeita. Yritys laskee saavansa toiminnasta nettotulovirran 10 000€/kuukausi.

Yritys B arvioi pystyvänsä parempien asiakaskontaktiensa avulla parempaan tulokseen siten, että samalla tuotantokoneistolla se saisi vakiotulovirran 15 000 euroa kuukaudessa.

Alussa yritys B joutuisi tekemään 20 000€alkuinvestoinnit markkinointiin. Onko ajateltavissa, että yritys A myisi tuotantokoneistonsa yritykselle B ja missä rajoissa myyntihinnan pitäisi olla, kun yrityksen käyttävät laskelmissaan korkointensiteettejä $\rho_A = 0.12$ ja $\rho_B = 0.14$?

$$NNA_A = \frac{12 \cdot 10\,000 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}}{0,12 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}} = 1\,000\,000 \text{ €}$$

$$NNA_B = -20\,000 \text{ €} + \frac{12 \cdot 15\,000 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}}{0,14 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}} = 1\,265\,700 \text{ €}$$

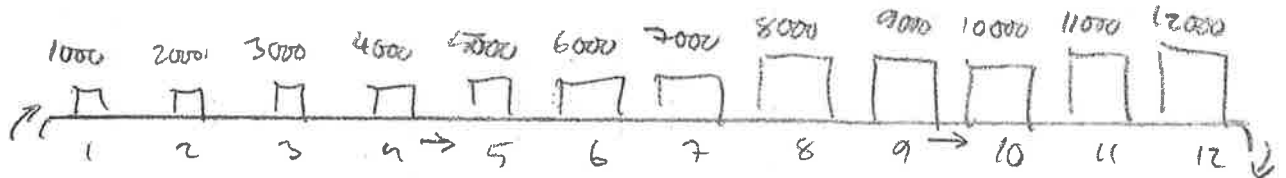
Vastaus: Kauppa voi toteutua, jos hinta on välillä 1,00 ME ... 1,26 ME

5. Yrityksellä on tuotantolinja, jossa on 12 työpistettä, jokaisessa työpisteessä koottavaan tuotteeseen asennetaan osia noin 1000€edestä. Tuotteen valmistaminen vie aikaa 48 tuntia (eli työpisteet työskentelevät 4h/tuote). Tuotanto on järjestetty jatkuvana kolmivuorotyönä, jolloin tuotteita valmistuu 6kpl/päivä ja 180 kpl/kk.

a) Laske liukuhihnalla oleviin osiin sitoutunut pääoma.

b) Mikä on tämän sitoutuneen pääoman kustannus (€/kk), kun laskentakorko on 8% p.a.?

c) Minkä verran tämä lisää yhden tuotteen valmistuskustannusta?



a) Hihnalla olevien osien arvo

$$1000€ + 2000€ + \dots + 12000€ = 12 \cdot \frac{1000€ + 12000€}{2}$$

$$= \underline{\underline{78000€}}$$

b) Vuotuinen pääomakustannus on

$$0,08 \cdot 78000€ = \underline{\underline{6240€}} \text{ (per vuosi!)}$$

c) tuotantoon sitoutuneen pääoman kustannus tuotteella kohden on

$$\frac{6240€/\text{vuosi}}{12 \cdot 180 \text{ kpl}/\text{vuosi}} = \underline{\underline{2,89€/\text{tuote}}}$$

6. Taulukossa on erään tuotteen hinnat peräkkäisinä vuosina.

- Laske tuotteen hintaindeksin arvot samoille vuosille, kun perusvuotena on 2000.
- Laske vuotuiset kasvutekijät ja kasvuprosentit.
- Laske koko aikajaksolle hinnan keskimääräinen kasvuprosentti.

vuosi	hinta	indeksi	kasvutek.	kasvupos.
1998	28,50	101,8		
1999	29,00	103,6	1,0175	1,75%
2000	28,00	100,0	0,9659	-3,45%
2001	28,80	102,9	1,0286	2,86%
2002	29,10	103,9	1,0104	1,04%
2003	30,00	107,1	1,0309	3,09%
2004	31,00	110,7	1,0333	3,33%
2005	31,20	111,4	1,0065	0,65%
2006	32,00	114,3	1,0256	2,56%
2007	33,00	117,9	1,0313	3,13%
2008	33,20	118,6	1,0061	0,61%
2009	33,50	119,6	1,0090	0,90%
2010	34,00	121,4	1,0149	1,49%

$$X_t = \frac{P_t}{P_{2000}} \cdot 100$$

↑ a)
↑ b)

c) kasvutekijöiden keskiarvo on

$$\left(\frac{P_{99}}{P_{98}} \cdot \frac{P_{00}}{P_{99}} \cdot \frac{P_{01}}{P_{00}} \cdot \dots \cdot \frac{P_{10}}{P_9} \right)^{\frac{1}{12}}$$

$$= \left(\frac{P_{10}}{P_{98}} \right)^{\frac{1}{12}} = \left(\frac{X_{2010}}{X_{1998}} \right)^{\frac{1}{12}} = \left(\frac{121,4}{101,8} \right)^{\frac{1}{12}}$$

$$= \underline{1,01478} \rightarrow \text{keskimääräinen vuosikasvu on } \underline{1,48\%}$$

7. Erään tuotekorin osalta tiedetään vuosien 2000 ja 2010 hinnat ja ostojen määrät. Perusajankohta on nyt 2000 ja vertailuajankohta 2010

tuote	2000			2010		
	p_0	q_0	a_0	p_t	q_t	a_t
1	15,00	100		10,00	300	
2	8,00	500		15,00	100	
3	30,00	20		20,00	200	

- a) Laske Laspeyres'in ja Paashenin hinta-indeksit.
b) Kerro sanallisesti, miksi indeksit eroavat niin paljon.

$$a) \quad P^L_{2000,2010} = \frac{10\text{€} \cdot 100 + 15\text{€} \cdot 500 + 20\text{€} \cdot 20}{15\text{€} \cdot 100 + 8\text{€} \cdot 500 + 30\text{€} \cdot 20} \cdot 100 = 145,90$$

$$P^P_{2000,2010} = \frac{10\text{€} \cdot 300 + 15\text{€} \cdot 100 + 20\text{€} \cdot 200}{15\text{€} \cdot 300 + 8\text{€} \cdot 100 + 30\text{€} \cdot 200} \cdot 100 = 75,2$$

b) Laspeyresin indeksissä suurimman painon saa tuote #2, jonka hinta nousi paljon.

Paashenin indeksissä suurimman painon saa tuote #1, jonka hinta laski merkittävästi.

i. Eroon aiheuttaa erilaiset painot.